ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Traité sur les Cubes Magiques de Bernard Violle

Patrick Böhringer
Professeur : Jacques Sesiano

Projet de Semestre
9 janvier 2010

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Les cubes magiques sont considérés de nos jours comme appartenant aux récréations mathématiques, c'est-à-dire aux problèmes de divertissement, au même titre que les carrés magiques. Ils sont toutefois apparus très tardivement en comparaison avec les carrés magiques.

Les premières traces de carrés magiques remontent au début de notre ère, en Chine. L'étude plus approfondie des carrés magiques fut par la suite traitée dans les pays islamiques, plus particulièrement vers la fin du XI^{e} siècle et pendant le XII^{e} siècle. L'étude des carrés magiques est alors considérée comme partie intégrante des recherches mathématiques et de la théorie des nombres. Les premières apparitions en Europe datent du XIV^{e} siècle et sont présentées notamment dans des textes traitant d'astrologie et d'alchimie, ce qui conduira à la terminologie d'aujourd'hui.

La première mention de *cube magique* est vraisemblablement dûe à Joseph Sauveur (1653 - 1716), un mathématicien et physicien français élu à l'Académie des Sciences. Mais le premier véritable traité sur les cubes magiques apparaît en 1837 avec le français Bernard Violle.

On ne connaît pas grand chose sur Bernard Violle à l'exception de sa nomination le 27 décembre 1815 au grade de *Chevalier de Saint-Louis*, un ordre honorifique créé par Louis XIV. Son ouvrage colossal publié en 1837 s'intitulé *Traité complet des carrés magiques simples et composés.* Ce traité est divisé en deux tomes de 600 pages chacuns et est accompagné d'une planche de figures afin d'illustrer ses écrits. Le premier tome commence par quelques définitions, puis, est suivi de deux parties traîtant respectivement des carrés magiques impairs et pairs. Le deuxième tome parle de variantes de carrés magiques et de plusieurs traités concernant les parallélogrammes magiques, les cubes magiques, les parallélipipèdes magiques, et finalement d'un essai sur les cercles magiques.

Les principales influences de Violle sont, selon lui, les français Sauveur, Philippe de la Hire (1640 - 1718), Poignard (1703), Jean-Joseph Rallier des Ourmes (1701 - 1771), Pajeau Louis-Léon Comte de D'ons en Bray (1678 - 1754), Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581 - 1638), et d'autres auteurs comme Stifel, Kircher ou encore Ozanam. Néanmoins, Violle considère que ces derniers « ne valent pas la peine d'être consultés. »

Il est intéressant de relever que Violle parle constamment de « Méz*é*riac » au lieu de « Méz*i*riac », ce qui à défaut de connaître grand chose sur Violle, nous offre au moins la possibilité de deviner un trait de son caractère et de penser que Violle survolait que rapidement les écrits de ses prédecesseurs pour faire une erreur si grossière sur un personnage pourtant bien connu de son temps.

Mais la principale influence de Violle est sans conteste Philippe de La Hire. La plupart des carrés magiques du traité de Violle sont construis par une méthode de tableaux issue de La Hire. Violle le mentionne comme étant le pionnier de cette « très-ingénieuse » méthode.

Violle reconnaît aussi que l'idée des cubes magiques lui vient de Sauveur, mais il est malgré tout très critique vis-à-vis de son collègue. Voici quelques propos qu'il tient à son égard :

> [...] son mémoire est d'ailleurs presque illisible à raison de la multitude d'erreurs dont il fourmille ; et, il faut le dire en passant, c'est un reproche que l'on peut faire à la majeure partie des Mémoires de cette intéressante et curieuse collection.
>
> Voici une théorie neuve, dont la première idée est due à Sauveur. Cet auteur s'est contenté de donner un exemple sur le cube de 5. [...] Il ne donne rien sur les cubes dont la racine est paire ; et il est aussi diffus lorsqu'il parle de cubes magiques, qu'il l'est lorsqu'il traite des carrés. Il est presque impossible de lire son mémoire depuis l'article 24 jusqu'au 58^e^. Il faut convenir que, malgré l'approbation de l'académie, dont il était membre, il n'y a guère moyen de tirer parti de ses méthodes embrouillées. Les lettres, dont il fait usage, ont une apparence scientifique ; mais elles ne donnent que des cas très-particuliers de formules plus générales [...] Sauveur a donc bien peu contribué au nouveau genre de combinaisons dont on va s'occuper.

Je vais principalement m'intéresser à son traité sur les cubes magiques car malgré son énorme ouvrage sur le sujet, on en fait que très peu référence de nos jours ; je vais m'efforcer d'en comprendre les raisons. Je ne parlerai de ses autres sujets abordés que si cela me semble nécessaire pour la compréhension de son traité sur les cubes magiques. Je me suis efforcé d'utiliser la même terminologie et de présenter les choses dans le même ordre que l'a fait Violle. Je n'ai omis aucun des cubes magiques présenté par Violle, et je les ait parfois illustré explicitement, ce qui n'a pas été fait dans son traité. Mais avant de parler de ce traité, il me semble nécessaire de faire une courte introduction sur les carrés et cubes magiques.

Chapitre 2

Carrés Magiques

2.1 Carrés Magiques

2.1.1 Définitions

Un carré divisé en un nombre carré de cases, dans lesquelles on place des nombres naturels, généralement d'une suite arithmétique, est appelé *carré magique* si la somme des termes de chaque ligne horizontale, chaque ligne verticale, ainsi que celle des deux diagonales est toujours la même.

Un carré ayant n cases sur les côtés est appelé *d'ordre* n et possède donc n^2 cases au total. Un carré magique d'ordre n a ainsi n lignes horizontales, n lignes verticales, et 2 diagonales pour lesquelles la somme se doit d'être une constante, que l'on appelle habituellement la *constante magique* ou la *somme magique*.

Si on suppose, comme c'est souvent le cas, que la suite arithmétique du carré magique est celle des nombres naturels, la somme de tout les termes du carré d'ordre n sera la somme des n^2 premiers nombres naturels, c'est-à-dire

$$\frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

La constante magique sera donc sa $n^{\text{ième}}$ partie, vu que chacune des n lignes horizontales (il en est de même pour les verticales) doit avoir pour somme la constante magique, et que la somme des valeurs dans les n lignes horizontales correspond à la somme totale des nombres inscrits dans les cases du carré magique. La constante magique d'un carré magique d'ordre n est donc

$$\frac{n(n^2+1)}{2}$$

2.1.2 Catégories de carrés magiques

On peut construire un carré magique pour n'importe quel ordre donné, excepté pour celui d'ordre 2 qui est impossible à faire si l'on a 4 éléments distincts. Le carré d'ordre 1 n'est pas considéré comme un carré magique car il est trivial et donc sans réel intérêt. Il existe plusieurs méthodes de constructions pour former un carré magique qui se distinguent essentiellement en trois catégories.

- Les carrés d'ordre *impair*, le plus petit étant d'ordre 3.
- Les carrés d'ordre *pairement pair*, c'est à dire ceux dont l'ordre n est divisible par 4, et qui sont donc de la forme $n = 4k$; le plus petit est le carré d'ordre 4.
- Les carrés d'ordre *pairement impair* (ou impairement pair), pour lesquels l'ordre n du carré est divisible par 2 mais pas par 4, donc de la forme $n = 2(2k + 1)$. Le plus petit en est le carré d'ordre 6.

En ajoutant des conditions supplémentaires au carré magique, on peut trouver plusieurs espèces de carrés magiques.

Les carrés pandiagonaux (ou *panmagique*) sont des carrés magiques tels que la somme des termes de chaque diagonale brisée est égale à la constante magique. Une *diagonale brisée* (ou *diagonales complémentaires*) est une paire de diagonales parallèles à une diagonale principale constituée de n cases au total. Une diagonale brisée devient une diagonale principale si on déplace une partie du carré initial d'un côté à son côté opposé.

3	6	15	10
16	9	4	5
2	7	14	11
13	12	1	8

1	8	11	14
15	10	5	4
6	3	16	9
12	13	2	7

FIG. 2.1 – Exemple de carrés magiques pandiagonaux d'ordre 4, la constante magique vaut 34.

Les carrés à bordures (ou *à enceintes*) sont les carrés magiques ayant la propriété que la suppression de la bordure qui enveloppe le carré magique donne un carré qui est toujours magique. Idéalement, on considère les carrés où l'on peut réitérer cette opération de suppression de bordure extérieures, jusqu'à ce que l'on arrive au plus petit carré magique, qui est d'ordre 3 ou 4, selon que l'on ait respectivement un carré magique d'ordre impair ou pair au départ. Nous avons donc plusieurs carrés magiques emboîtés dans les carrés à bordures.

38	39	41	5	3	1	48
4	30	31	15	13	36	46
6	16	26	21	28	34	44
43	33	27	25	23	17	7
42	32	22	29	24	18	8
40	14	19	35	37	20	10
2	11	9	45	47	49	12

Fig. 2.2 – Exemple d'un carré magique à bordures d'ordre 7, la constante magique vaut 175.

Les carrés à compartiments sont des carrés magiques divisés en compartiments carrés, lesquels sont également magiques. B. Violle fait plusieurs variantes des carrés à compartiments en formant des compartiments avec des formes géométriques diverses, construisant ainsi ce qu'il nomme des *croix*, *châssis*, *équerres*, ou *bandes détachées*.

17	2	63	48	21	6	59	44
47	64	1	18	43	60	5	22
46	61	4	19	42	57	8	23
20	3	62	45	24	7	58	41
25	10	55	40	29	14	51	36
39	56	9	26	35	52	13	30
38	53	12	27	34	49	16	31
28	11	54	37	32	15	50	33

Fig. 2.3 – Exemple d'un carré magique à compartiments d'ordre 8, la constante magique vaut 260.

Les carrés multimagiques sont des carrés magiques avec la propriété remarquable que si on élève les termes du carré magique à une certaine puissance, le nouveau carré est encore magique. Un carré *bimagique* est donc un carré magique qui reste encore magique lorsqu'on élève ses termes au carré. Pour le cas où les termes sont élevés au cubes, on parle de carré *trimagique*. Violle ne fait pas mention de ce type de carrés magiques, mais ils ont été ardemment étudié par la suite. Il a par exemple été conjecturé qu'il n'existe pas de carrés bimagiques non trivial d'ordre plus petit que 8.

9	51	8	62	44	18	37	31
4	58	13	55	33	27	48	22
46	24	35	25	15	53	2	60
39	29	42	20	6	64	11	49
21	47	28	34	56	14	57	3
32	38	17	43	61	7	52	10
50	12	63	5	19	41	30	40
59	1	54	16	26	36	23	45

FIG. 2.4 – Un carré magique pandiagonal d'ordre 8 qui est aussi bimagique ; la constante magique du carré avec les termes élevés au carré est de 11'180.

2.2 Tableaux

Violle définit par *tableaux* deux carrés d'ordre n dont les éléments du premier carré sont les entiers naturels de 1 jusqu'à n et que les élements du deuxième tableau, des multiples de n de 0 jusqu'à $n(n-1)$. Les entiers d'un tableau sont placés de manière à avoir uniquement des élements distincts dans chaque ligne, et la somme, des termes de chaque colonne et de chacune des deux diagonales, constante. Si on additionne alors terme à terme les cases correspondantes des deux tableaux, on obtiendra un carré qui satisfait la propriété magique, pour autant que chaque couple de cases soit distinct des autres. En effet, une ligne du carré magique ainsi formée, contient chacune des unités de 1 à n, et d'autre part chacun des multiples de n jusqu'à $n(n-1)$. Leurs sommes, respectivement $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n^2(n-1)}{2}$, sont bien égales à la constante magique $\frac{n(n^2+1)}{2}$. Il en va de même pour les colonnes et les diagonales.

Il est facile de retrouver les tableaux à partir de la donnée d'un carré magique. Pour chaque nombre inscrit dans le carré magique, on fait la division euclidienne par l'ordre du carré ; le premier tableau sera constitué des restes de la division, le deuixième tableau des quotients. La seule exception est pour les nombres qui sont multiples de l'ordre du carré ; le premier tableau ne contient pas la valeur 0, le nombre associé sera donc n, et son « quotient » associé sera diminué de 1.

Si la propriété de pandiagonalité est satisfaite dans les deux tableaux, on obtiendra au final un carré magique pandiagonal. Par contre l'inverse n'est pas vrai ; on peut avoir des carrés pandiagonaux dont les tableaux associés ne le sont pas. Le procédé des tableaux est une manière, parfois longue, de former des carrés magiques. Violle estime que cette méthode est plus convenable pour la construction des carrés impairs que des carrés pairs. Toutefois, pas tous les carrés magiques peuvent être construit à l'aide des tableaux, en particulier les carrés à bordures.

Présentemment, on appelle les deux premiers tableaux des *carrés latins*, et le carré magique ainsi déduit, le *carré eulérien*. Violle utilise la méthode des tableaux pour obtenir ses cubes magiques, comme on le verra par la suite.

2.2.1 Tableaux pour les carrés magiques impairs

Pour les carrés magiques d'ordre impair, Violle utilise la dénomination du *moyen* pour désigner le terme médian d'une progression arithmetique. Le moyen d'un carré magique d'ordre impair est souvent situé au centre du carré, mais pas toujours. Le moyen du premier tableau, constitué des entiers naturels $1, 2, ..., n$, est $\frac{n+1}{2}$, et le moyen du tableau des multiples de l'ordre est $\frac{n(n-1)}{2}$.

Voici une illustration, dans la figure 2.5, des deux tableaux permettant de trouver le carré magique d'ordre 3 de la figure 2.6.

3	1	2
1	2	3
2	3	1

3	0	6
6	3	0
0	6	3

FIG. 2.5 –

6	1	8
7	5	3
2	9	4

FIG. 2.6 –

Il apparaît sur les figures, que le moyen du carré magique d'ordre 3 se trouve dans la case du centre, et que les moyens respectifs à chaque tableau se trouvent tous alignés sur une des deux diagonales. De fait, ces deux propriétés sont indissociables du carré magique d'ordre 3.

Pour les ordres impairs supérieurs à 3, les moyens des deux tableaux n'ont pas la nécessité de se trouver, contrairement au carré d'ordre 3, exclusivement sur une diagonale ; les diagonales seront alors constituées d'entiers distincts. Violle nous donne 6 conditions à surveiller lorsqu'on souhaite construire les tableaux d'un carré dont l'ordre est un nombre premier impair.

1. Après avoir écrit la première ligne horizontale (ou verticale) d'un tableau, en introduisant dans un ordre quelconque tout les nombres naturels jusqu'à la racine du carré, la deuxième ligne pourra être construit de la manière qu'il sera expliqué. Les lignes suivantes seront alors toutes déterminées, l'ordre des nombres placés est le même que celui choisit dans la première ligne, et elles devront toutes commencer par le nombre du même ordre pris de la ligne précedente. Ainsi, si par exemple la deuxième ligne commence par le troisième terme de la première ligne, la troisième ligne commencera par le troisième terme de la deuxième ligne, la quatrième ligne commencera par le troisième terme de la troisième, et ainsi de suite.
2. La deuxième ligne ne peut pas commencer par le premier terme de la première ligne ; sinon, la somme des termes en verticale ne serait plus égale à la constante magique.
3. Si la deuxième ligne du premier tableau commence par un naturel d'un certain ordre pris de la première ligne, le deuxième tableau ne peut pas commencer la deuxième ligne par un nombre du même ordre ; sinon, on n'obtiendrait pas des nombres tous distincts dans le carré final.
4. La deuxième ligne ne peut pas commencer par le deuxième terme de la première ligne. Sinon, la diagonale serait constituée du même entier, et la somme des entiers de la diagonale ne serait donc pas égale à la constante magique, à moins qu'il s'agisse du terme moyen.

5. La deuxième ligne ne peut pas commencer par le dernier terme de la première ligne car le premier nombre serait alors répété sur la diagonale et la somme ne serait donc pas magique, à moins qu'il s'agisse du terme moyen.
6. Si le moyen d'un tableau est répété sur une diagonale, l'autre tableau ne pourra pas avoir son moyen répété sur la même diagonale ; on aurait pas des nombres tous distincts dans le carré final ainsi formé.

Si on veut par contre former les tableaux pour un carré d'ordre impair n quelconque, il faut faire attention que la deuxième ligne commence par un entier d'un certain ordre pris dans la première ligne ayant 1 pour plus grand diviseur commun avec n. Sinon, les bandes verticales ne seraient pas toutes constituées de nombres distincts. Violle ne fait pas mention de cette remarque ; il constate simplement que cette méthode fonctionne par exemple dans certain cas pour un carré d'ordre 9, et dans d'autres cas non. Pour pallier à ce problème, il nous donne une méthode pour former un carré magique et ses tableaux associés pour n'importe quel ordre impair n donné. Il la nomme la *méthode expéditive*. C'est une méthode, déjà connue en Inde vers l'an 1680 mais dont Violle ne fait aucune référence.

La méthode expéditive consiste à placer le nombre 1 au centre de la première ligne du carré magique impair qu'on souhaite construire, puis on trace une diagonale brisée passant par la case du nombre 1. On place les nombres de 2 jusqu'à n dans la diagonale brisée comme il est illustré par l'exemple du carré d'ordre 7 de la figure 2.7. Une fois les nombres placés, on attribue la case du nombre suivant $n + 1$ juste en dessous du dernier terme de la diagonale brisée construite précedement. On recommence l'opération, à savoir tracer une diagonale brisée paralèlle à la première, passant par la case contenant le nombre $n + 1$, et on y inscrit les nombres de $n + 2$ jusqu'à $2n$. Au final, on obtient un carré (comme dans la figure 2.7) qui satisfait la propriété de magie simple.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

FIG. 2.7 – Un carré magique d'ordre 7 construit par la *méthode expéditive.*

La justification de la magie simple est évidente si on regarde les tableaux du carré ainsi construit. La deuxième ligne du premier tableau commence par le $\frac{n+1}{2}$ terme de la première ligne, et dans le deuxième tableau, le moyen se trouve sur une diagonale et la deuxième ligne commence ainsi par le deuxième terme de la première. Il est clair que $\frac{n+1}{2}$ et le nombre 2 auront toujours 1 pour plus grand diviseur avec un nombre n impair quelconque. Il en découle que cette *méthode expéditive* est une manière de construire les tableaux de n'importe quel ordre impair et qui satisferont toujours les six conditions de Violle propres au carré magique.

2	4	6	1	3	5	7
3	5	7	2	4	6	1
4	6	1	3	5	7	2
5	7	2	4	6	1	3
6	1	3	5	7	2	4
7	2	4	6	1	3	5
1	3	5	7	2	4	6

28	35	42	0	7	14	21
35	42	0	7	14	21	28
42	0	7	14	21	28	35
0	7	14	21	28	35	42
7	14	21	28	35	42	0
14	21	28	35	42	0	7
21	28	35	42	0	7	14

FIG. 2.8 – Tableaux du carré magique construit par la *méthode expéditive.*

2.2.2 Tableaux pour les carrés magiques pairs

Pour les carrés magiques d'ordre pair, on peut avoir plusieurs variantes de construction de tableaux.

– On peut avoir une construction de tableaux, comme pour les ordres impairs, où aucun nombre n'est répété sur les lignes horizontales, verticales, ou diagonales.

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

0	4	8	12
8	12	0	4
12	8	4	0
4	0	12	8

Fig. 2.9 – Exemple de tableaux sans nombres répétés dans une même ligne.

– On peut former des tableaux qui possèdent des nombres répétés sur certaines de ses lignes, pour autant que la somme des termes de chaque ligne reste constante.

3	3	2	2
1	1	4	4
4	2	3	1
2	4	1	3

0	12	4	8
0	12	4	8
12	0	8	4
12	0	8	4

Fig. 2.10 – Exemple de tableaux avec des même nombres répétés sur les lignes.

– On peut aussi avoir des tableaux de carrés magiques où les diagonales sont incomplètes, c'est-à-dire que la somme des termes dans une diagonale d'un tableau n'est pas égale à celle des lignes horizontales ou verticales. On ne peut pas, dans ce cas précis, avoir de similitude entre les deux tableaux d'un carré magique. Pour le carré d'ordre 4 par exemple, si un tableau possède des diagonales incomplètes formés de 2 éléments distincts, les diagonales du deuxième tableau devront impérativement être constituées de 3 ou 4 éléments distincts.

1	2	3	4
1	2	3	4
4	3	2	1
4	3	2	1

0	0	12	12
12	12	0	0
8	4	8	4
4	8	4	8

Fig. 2.11 – Exemple de tableaux avec diagonales incomplètes.

Violle nous donne différentes méthodes de construction de tableaux, selon que le carré soit d'ordre pairement pair ou pairement impair ; la majorité des méthodes présentées par Violle sont celles de Sauveur, Philippe de la Hire, Poignard, Rallier des Ourmes et de D'ons en Bray. Violle attribue chaque méthode présentée à la personne à qui l'on doit sa découverte.

Pour les carrés pairement pair, Violle nous donne une méthode qui selon lui est la façon la plus facile de former de tels carrés ; il nomme cette construction la *méthode expéditive* des carrés d'ordre divisible par 4. Mais Violle n'attribuera à personne cette méthode de construction, pourtant connue de l'époque.

On commence par remplir un carré pairement pair par des entiers placés dans l'ordre naturel comme dans la figure 2.12. On sépare ensuite le carré en quatre parties par deux lignes, une horizontale et une autre verticale, passant par les milieux des côtés.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Fig. 2.12 – Étape de construction d'un carré d'ordre 8 par la méthode expéditive.

Pour un carré d'ordre n, on définit le nombre complémentaire d'un entier a_i par le naturel $(n^2+1)-a_i$. Ainsi par exemple, pour un carré d'ordre 8, le nombre complémentaire de 1 est 64, celui de 2 est 63 et ainsi de suite. Pour obtenir le carré magique d'ordre pairement pair par la méthode expéditive, on modifie le carré de la figure 2.12 comme suit : on remplace une case sur deux par son nombre complémentaire en respectant la règle que deux cases séparées par une des deux lignes construites sont du même type. Le carré magique d'ordre 8 sera ainsi le suivant :

1	**63**	3	**61**	**60**	6	**58**	8
56	10	**54**	12	13	**51**	15	**49**
17	**47**	19	**45**	**44**	22	**42**	24
40	26	**38**	28	29	**35**	31	**33**
32	34	**30**	36	37	**27**	39	**25**
41	**23**	43	**21**	**20**	46	**18**	48
16	50	**14**	52	53	**11**	55	**9**
57	**7**	59	**5**	**4**	62	**2**	64

FIG. 2.13 – Un carré d'ordre 8 construit par la méthode expéditive avec en gras les entiers qui ont été remplacés par leurs nombres complémentaires.

Il est étonnant de remarquer que malgré le fait que Violle considère cette méthode de construction comme étant la plus aisée et expéditive à réaliser, il préfère utiliser une méthode de La Hire pour la construction des tableaux de ses cubes magiques d'ordre pairement pair. Mais outre le traité sur les cubes magiques, il utilise régulièrement cette méthode expéditive dans son ouvrage et en particulier dans son traité sur les parallélipipèdes magiques.

Violle souligne que pour cette méthode, si nous considérons une suite de nombres qui n'est plus celle de l'ordre naturel des entiers mais plutôt une suite de n^2 entiers distincts divisés en n parties, on obtient facilement un carré magique. On construit dans un premier temps le carré magique de la suite arithmétique naturelle par la méthode expéditive et on substitue ensuite dans l'ordre les entiers par ceux de la suite interrompue. Cette remarque est également valable pour les cubes magiques ainsi que dans les cas où la raison de la progression arithmétique n'est pas unitaire.

Chapitre 3

Cubes Magiques

3.1 Cubes Magiques

Un *cube magique* est l'équivalent du carré magique en dimension trois. On divise un cube en un nombre cubique de cases dans lesquelles on place les nombres naturels dans les différentes cases de telle sorte que la somme des termes de chaque ligne horizontale, chaque ligne verticale, chaque ligne en profondeur, ainsi que les 4 diagonales principales soit toujours une constante. Un cube ayant n^3 cases au total est dit d'ordre n. On ne peut pas avoir de cube magique d'ordre 2, si on omet le cube trivial d'ordre 1, il en découle que le plus petit cube magique qui puisse être construit est celui d'ordre 3.

La somme des n^3 premiers entiers naturels est de

$$\frac{n^3(n^3+1)}{2}$$

Si on divise cette somme par n^2, on obtiendra la constante magique qui est donc :

$$\frac{n(n^3+1)}{2}$$

On définit une *triagonale* comme étant des cases alignées de telle sorte que les trois coordonnées spatiales varient lorsqu'on se déplace d'une case à l'autre. Si une des coordonnées reste inchangée pour chaque case, on la nomme *diagonale*. Une diagonale est donc un cas particulier de la triagonale en dimension 2. Une diagonale d'un cube magique est donc une rangée de n nombres, contenue dans un plan et qui n'est pas orthogonale aux faces du cube.

Une triagonale qui relie un sommet du cube au sommet opposé est appelée *triagonale principale* ou aussi *diagonale principale* par abus de language. Une *triagonale brisée* est l'équivalent d'une diagonale brisée pour les triagonales, à savoir une paire ou un triplet de triagonales parallèles à une triagonale principale de telle sorte à avoir n cases en tout.

Un cube d'ordre n est constitué de n^2 lignes horizontales, n^2 lignes verticales, n^2 lignes en profondeur, de $6n$ diagonales, de $6n(n-1)$ diagonales brisées, de 4 triagonales principales, et de $4(n^2-1)$ triagonales brisées.

Un cube magique parfait est un cube magique qui a la propriété supplémentaire que la somme des termes des $6n$ diagonales est égale à la constante magique. Un cube magique parfait a la particularité que chaque carré d'ordre n du cube est magique. Le cube magique parfait possède ainsi $3n$ carrés magiques orthogonaux aux faces du cube, et 6 carrés magiques obliques (dont ses diagonales sont les diagonales principales du cube). Un cube magique qui n'est pas parfait, est appelé *semi-parfait* ou *cube magique simple.* Toutefois, certains auteurs de ces deux dernières décennies ne définissent pas ceci comme étant un cube magique parfait, mais plutôt comme un *cube diagonal.*

Un cube magique pandiagonal est un cube magique qui satisfait la propriété que chaque carré orthogonal à une face du cube est un carré pandiagonal. Un cube magique pandiagonal est donc un cube magique parfait avec la particularité supplémentaire que la somme des termes des $6n(n-1)$ diagonales brisées est aussi égale à la constante magique. Le plus petit cube pandiagonal est d'ordre 7.

Un cube magique pantriagonal est un cube magique simple qui remplit la condition supplémentaire que la somme des termes de chacune de ses triagonales brisées est égale à la constante magique. Un cube pantriagonal n'est en général pas un cube magique parfait. Le plus petit cube pantriagonal est d'ordre 4.

Un cube magique Nasik est un cube magique qui est à la fois pandiagonal et pantriagonal. C'est une traduction littérale de l'anglais *Nasik magic cube.* Vu le manque de référence d'auteurs francophones, on trouve diverses définitions ; par exemple *cube pandiagonal parfait* ou parfois même *cube magique parfait.* Dans tout les cas, c'est le meilleur cube qui soit, car chaque alignement de n cases est magique. Un cube magique Nasik possède donc n^2 lignes horizontales, n^2 lignes verticales, n^2 lignes en profondeur, $6n$ diagonales, $6n(n-1)$ diagonales brisées, 4 triagonales principales, et $4(n^2-1)$ triagonales brisées qui ont toutes pour somme de leurs termes la constante magique. Soit $13n^2$ lignes magiques en tout. Chacun des carrés du cube (orthogonaux, obliques, ainsi que les carrés obliques brisés) sont des carrés pandiagonaux. Le plus petit cube magique Nasik connu est d'ordre 8 ; il fut découvert en 1888 par l'américain Frederick Augustus Porter Barnard (1809 - 1889). Il fallut ensuite attendre 88 ans pour qu'un deuxième cube Nasik soit découvert !

Le terme *Nasik* fut introduit pour la première fois par Andrew H. Frost (1819 - 1907), un mathématicien et prêtre anglican qui a longtemps travaillé en tant que missionnaire dans une ville d'Inde nommée Nasik. Dans son article paru dans la revue scientifique anglaise *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* de 1866, A.H. Frost nomme les cubes d'ordre 7 et 8 qu'il découvre par le terme *Nasik Cube*. C'est la première fois, à notre connaissance, qu'un cube magique parfait est publié. A.H. Frost, tout comme F.A.P. Barnard, semble être en avance sur son temps, et se met en quête de trouver des cubes ayant de plus fortes propriétés que les cubes simplement magiques. Les cubes d'ordre 7 et 8 découverts par Frost se révèlent être respectivement un cube *pandiagonal* et un cube *pantriagonal*. Il utilise donc le terme Nasik pour désigner les cubes magiques qui sont meilleurs que les cubes magiques simples.

Plusieurs mathématiciens contemporains préfèrent ne pas utiliser l'expression d'un *cube Nasik* mais plutôt d'utiliser la dénomination de *cube magique parfait*, ce qui paraît plus logique vu que le cube Nasik est le meilleur cube que l'on puisse trouver. Mais la dénomination *Nasik* a été préférée pour éviter toute confusion avec le terme *parfait* (lequel a été utilisé par divers auteurs de façon non unanime pour parler, entre autres, du cube magique pandiagonal ou du cube magique diagonal). De ce fait, le terme *Nasik* a été adopté dans la définition anglophone d'un hypercube magique qui a pour somme, dans chacune de ses lignes possibles, la constante magique. Un hypercube magique Nasik de dimension d a la particularité d'avoir exactement $\frac{3^d-1}{2}$ lignes qui passent par chacune de ses cases et ayant pour somme de leurs termes la constante magique. Pour un hypercube magique Nasik d'ordre n, il y a donc $\frac{3^d-1}{2}n^{d-1}$ lignes magiques en tout. Un hypercube magique Nasik de dimension 2 possède $4n$ lignes magiques, il s'agit donc du carré pandiagonal. Le premier hypercube Nasik de dimension 4 (appelé aussi *tesseract magique*) fut trouvé par John R. Hendricks (1929 - 2007) en 1999 ; c'est un tesseract d'ordre 16 et la constante magique vaut 524'296.

Il existe plusieurs autres dénominations pour caractériser les cubes magiques, comme par exemple *cube magique complet*, *cube magique compact*, *cube magique pentriagonal diagonal*, *cube multimagique* (bimagique, trimagique, etc...).

Le premier cube magique parfait, d'ordre 7, fut publié par A.H. Frost en 1866. Puis, durant le siècle qui suivit la découverte de Frost, plusieurs autres cubes magiques parfaits d'ordre supérieur furent trouvés. Il n'existe pas de cube magique parfait d'ordre 3 ou 4, le plus petit étant ainsi celui d'ordre 5 de la figure 3.1, découvert pour la premiére fois en 2003 par Walter Trump et Christian Boyer.

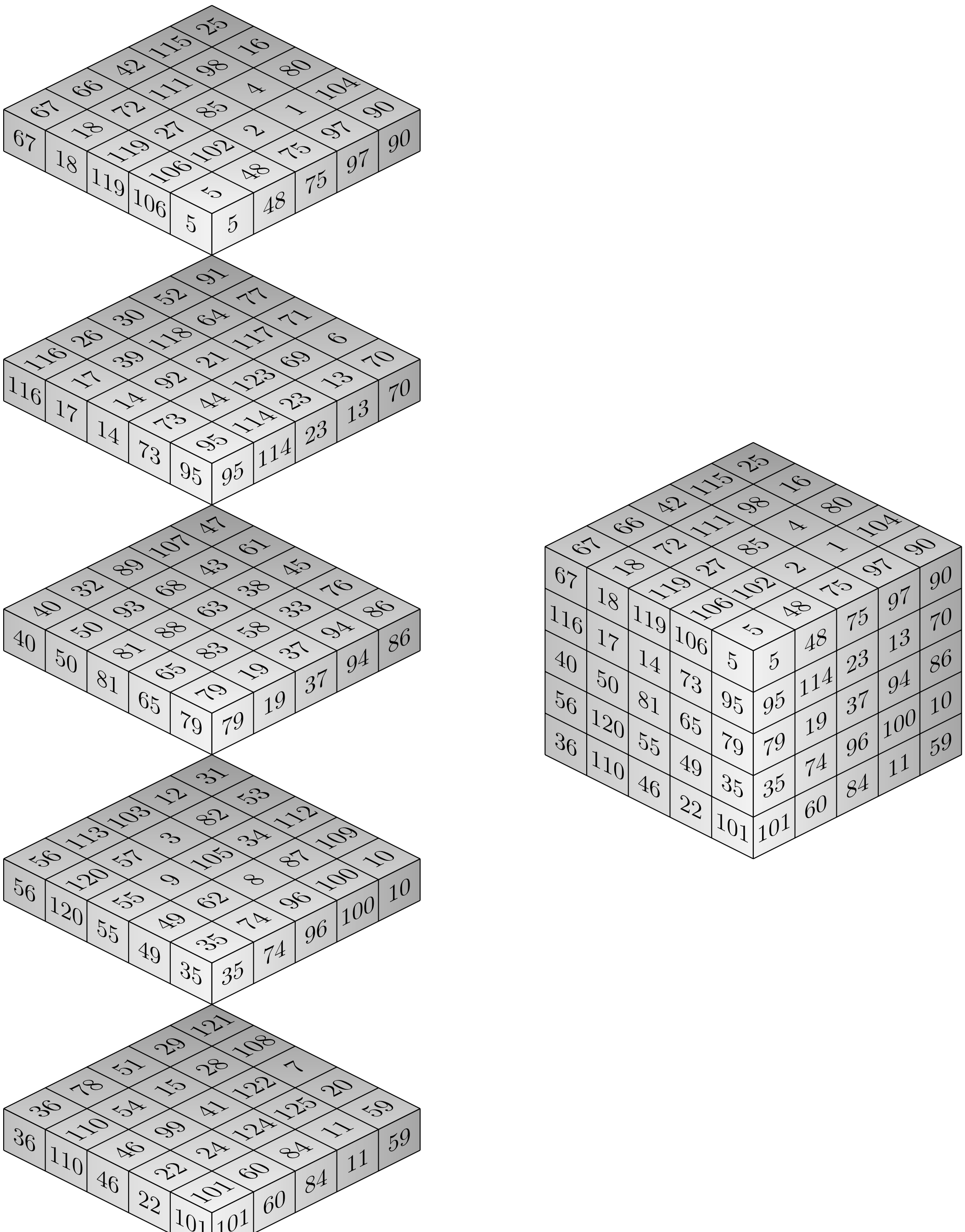

Fig. 3.1 – Premier cube magique parfait d'ordre 5 découvert en 2003 par W. Trump et C. Boyer ; la constante magique vaut 315.

Chapitre 4

Traité sur les cubes magiques de Bernard Violle

Bernard Violle ne définit pas du tout les cubes magiques dans le sens que nous le définissons de nos jours. Pour lui, dans un cube magique, il faut que chacune de ses tranches (c'est-à-dire chaque carré du cube) ait la somme de tous ses termes constante, et ceci même dans les carrés obliques. C'est une définition qui peut paraître logique, vu que dans un carré magique (de dimension 2), ce sont les lignes (de dimension 1) qui doivent avoir pour somme la constante magique, et donc un cube (de dimension 3) devra avoir ses plans (de dimension 2=3-1) dont la somme équivaut à la constante magique.

Il est difficile de déterminer si Violle était le seul, avec Sauveur, à définir un cube magique de cette façon, et dans le cas contraire, de savoir quand le changement de définition eut lieu. On a très peu de référence d'auteurs, datant du XIX$^{\text{e}}$ siècle, traitant les cubes magiques. Pourtant, en 1866, A.H. Frost adopte déjà la définition de cube magique qui est la nôtre.

Pour Violle, la somme des termes contenues dans les $3n$ tranches orthogonales aux faces du cubes et dans les 6 tranches obliques, doit être égale à la constante magique. Vu que la somme des n^3 premiers entiers naturels est :

$$\frac{n^3(n^3+1)}{2}$$

La constante magique pour les cubes magiques, selon Violle, sera donc cette fois-ci sa $n^{\text{ième}}$ partie, soit

$$\frac{n^2(n^3+1)}{2}$$

Violle utilise la méthode des tableaux pour obtenir ses cubes magiques. Comme on se trouve en dimension 3, il faut trois tableaux. Le premier tableau contiendra les entiers naturels de 1 jusqu'à n, le deuxième aura des multiples de n, de 0 jusqu'à $n(n-1)$, et le troisième tableau sera composé des multiples de n^2 de 0 jusqu'à $n^2(n-1)$. Les entiers d'un tableau sont placés comme en dimension deux ; les élements dans chaque ligne sont distincts, et la somme des termes de chaque colonne et des deux diagonales, est une constante. La réalisation complète d'un cube magique s'obtient à l'aide de ces trois tableaux ; chaque nombre inscrit dans une case du cube magique est la somme de trois entiers respectivement issues des trois tableaux. Il suffit donc de disposer les tableaux de manière à éviter une répétition de nombres.

Afin d'illustrer un cube d'une telle construction, Violle représente chacun des tableaux sur une face d'un cube. Voici un exemple, soumis par Violle, du seul cube magique découvert par Sauveur. (figure 4.1)

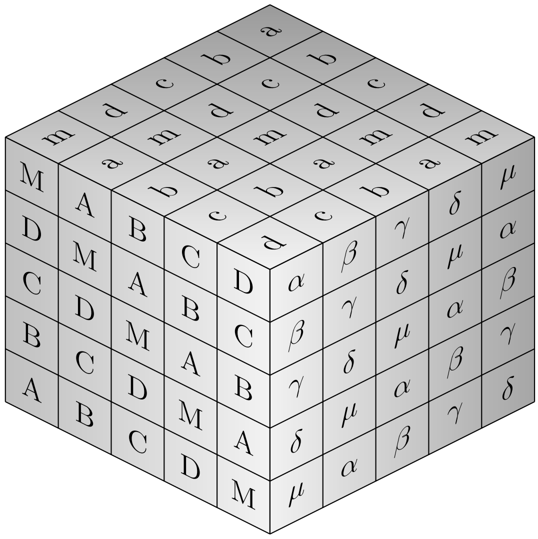

FIG. 4.1 – Cube magique d'ordre 5 découvert par Sauveur

Il emploie les lettres A, B, C, D, M afin de désigner les nombres naturels jusqu'à n, a, b, c, d, m pour les multiples de n, et α, β, γ, δ, μ pour les multiples de n^2. M, n et μ sont les moyens de leurs suites arithmétiques respectives. Il faut trois lettres pour former une cellule du cube ; le centre du cube a par exemple pour valeur $M + m + \mu$.

La somme des termes de chaque tranche équivaut à la constante magique. En effet, une tranche orthogonale du cube contient n fois les valeurs $A+B+C+D+M$, n fois les valeurs $a+b+c+d+m$ et n fois $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\mu$. La somme totale vaut donc $n[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n-1)}{2} + \frac{n^3(n-1)}{2}]$ qui est bien égale à la constante magique $\frac{n^2(n^3+1)}{2}$. Il en va de même pour les tranches diagonales. Ce type de construction, illustré par un cube d'ordre 5, peut être appliqué à la réalisation de n'importe quel cube magique d'ordre impair. Les moyens sont mis en diagonale, mais Violle s'efforce de trouver d'autres méthodes de constructions de tableaux où les moyens prennent place différement.

4.1 Cube d'ordre impair

4.1.1 Cube d'ordre 3

Le premier cube magique que Violle nous donne en illustration, est

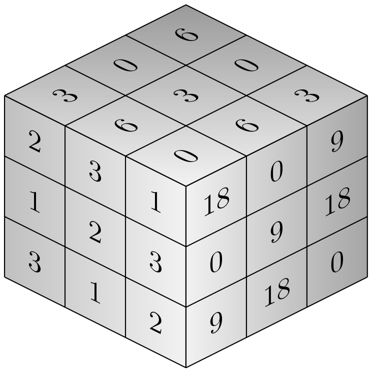

Fig. 4.2 – Tableaux du cube magique d'ordre 3 de Violle

Qui correspond au cube magique que voici :

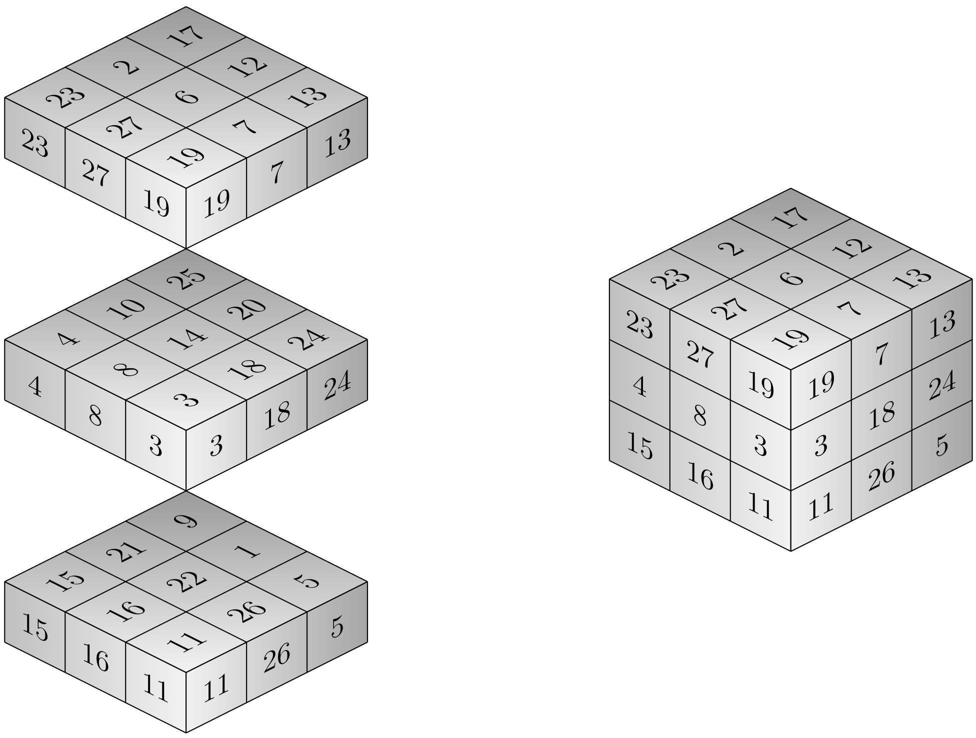

Fig. 4.3 – Cube magique d'ordre 3 de Violle

Violle ne précise pas le nombre de manière différente de construire un cube magique d'ordre 3, il souligne seulement le fait que les moyens doivent se trouver sur les diagonales, comme pour le carré magique d'ordre 3. Violle se lance alors dans deux pages de calculs, que je ne ferai pas mais qu'il est aisé de vérifier, pour constater qu'effectivement les neufs tranches orthogonales et les six tranches obliques ont toutes pour somme la constante magique, qui est de 126 pour le cube d'ordre 3. Plusieurs fautes se sont introduites dans ses calculs de vérification, mais aucune d'ordre conceptuel. Il est donc fort probable qu'il s'agisse simplement d'une erreur de l'imprimeur.

4.1.2 Cube d'ordre 5

Violle nous donne en illustration un cube d'ordre 5 qui ne possède pas les moyens en diagonales comme dans le cube d'ordre 5 de Sauveur.

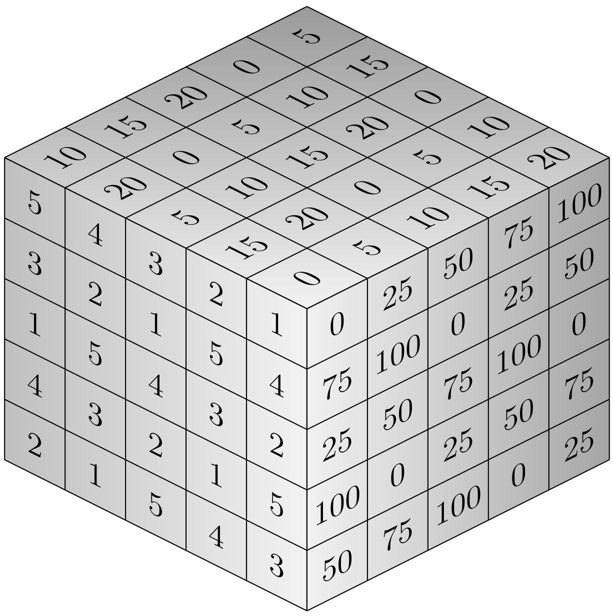

Fig. 4.4 – Tableaux du cube magique d'ordre 5 de Violle

Qui correspond au cube magique que voici :

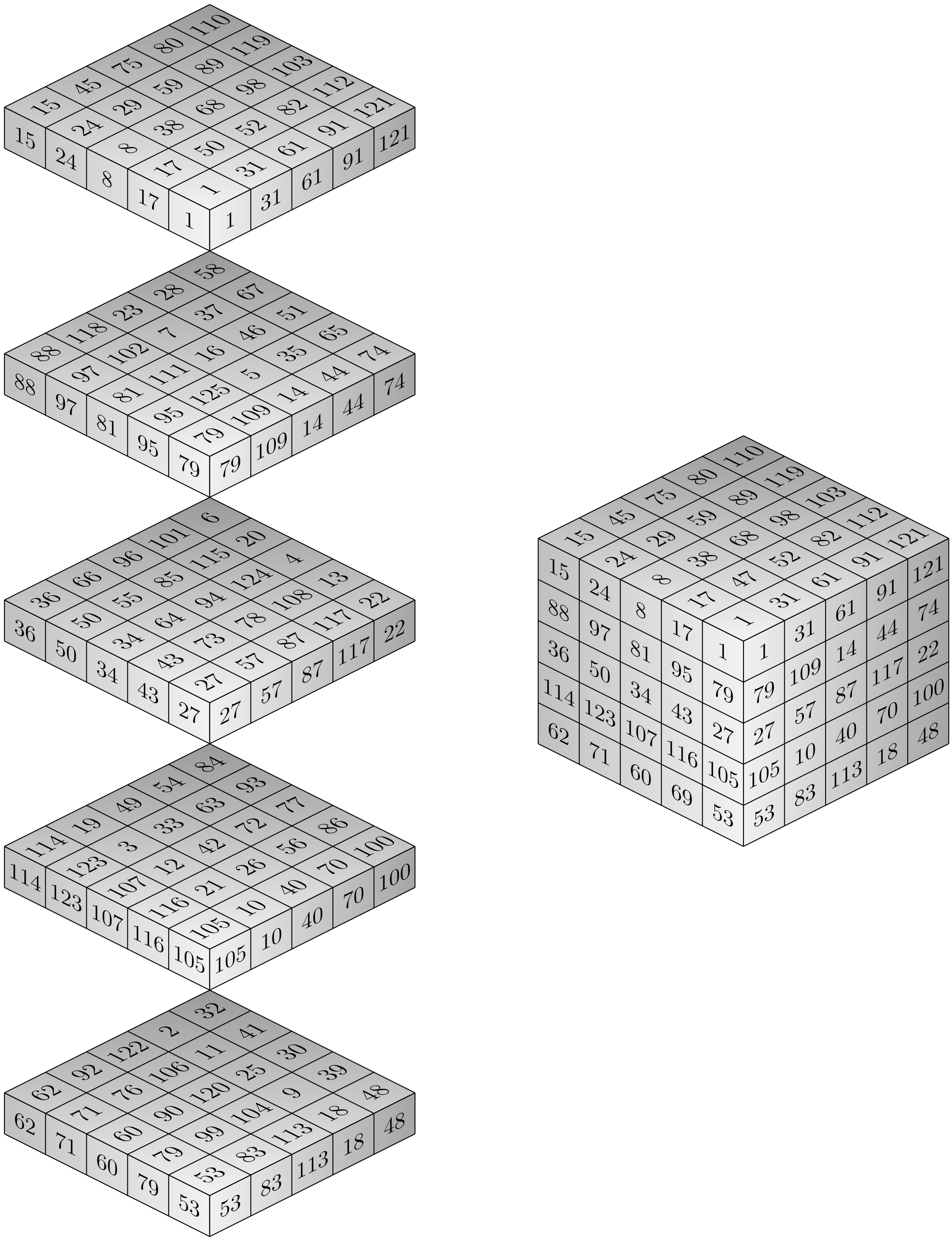

FIG. 4.5 – Cube magique d'ordre 5 de Violle

Comme pour le cube d'ordre 3, Violle vérifie que chaque tranche du cube magique d'ordre 5 a bien pour somme de ses termes la constante magique, qui vaut cette fois-ci 1′575. Il souligne toutefois que le plus important lors d'une construction de tableau est d'éviter la répétition de nombres par l'addition de trois même nombres issus des tableaux. Par exemple, si on souhaite modifier le cube d'ordre 5 illustré ci-dessus, et avoir cette fois-ci le moyen du tableau des unités en diagonale tout en laissant les deux autres tableaux pareils, on devra faire attention de savoir sur quelle diagonale l'entier 3 pourra se trouver. En effet, si la diagonale 2-3-4-5-1 était constituée uniquement du terme moyen 3, on aurait des répetitions de nombres dans le cube. Ainsi, seule la diagonale 5-2-4-1-3 pourra avoir comme seul élement le terme moyen 3.

Ce cube d'ordre 5 de Violle n'est pas, dans la définition contemporaine, un cube magique simple ; seul un cinquième de ses lignes horizontales et verticales ont pour somme la constante magique contemporaine de 315. Mais il est intéressant de remarquer que le cube d'ordre 5 de Violle vaut pour toutes ses diagonales (simples et brisées) ainsi que ses tridiagonales (simples et brisées), la somme magique 315. Cela vient du fait que tous ces tableaux sont des carrés pandiagonaux.

4.1.3 Cube d'ordre 7

Violle nous donne en illustration un cube d'ordre 7. On voit sur la figure 4.6 les tableaux du cube. Je ne m'attarderai pas plus sur le développement complet d'un cube magique ; il est toutefois simple de déduire le cube magique à partir des tableaux donnés.

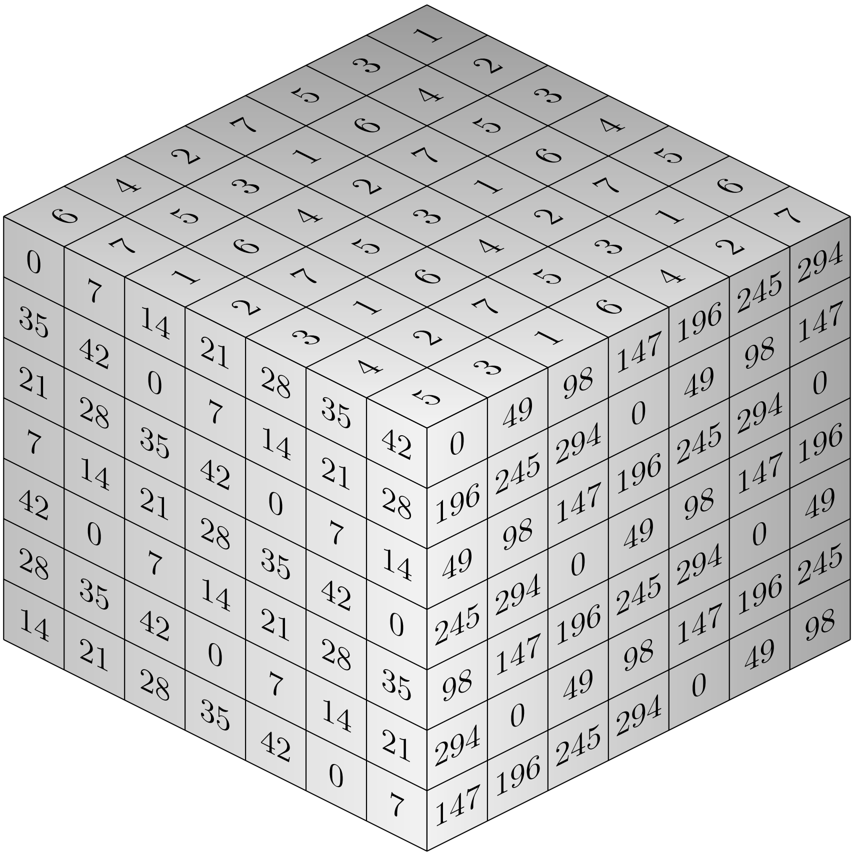

Fig. 4.6 – Tableaux du cube magique d'ordre 7 de Violle

Il place cette fois-ci les tableaux différemment ; il remarque que cela n'influence pas le résultat final du cube. Il va profiter des 8 pages de calculs de vérification de la propriété magique du cube, afin de faire remarquer au lecteur qu'il n'est pas nécessaire de procéder au calcul de toutes les tranches du cube. Par cette méthode de construction de tableaux, si une tranche a pour somme de ses termes la constante magique, on en déduit la même somme pour les autres tranches.

En effet, prenons pour exemple les deux premières tranches horizontales du dessus du cube d'ordre 7.

6	53	100	154	201	248	295
14	61	108	155	209	256	303
15	69	116	163	217	264	311
23	77	124	171	218	272	319
31	78	132	179	226	280	327
39	86	140	187	234	281	335
47	94	141	195	242	289	343

1re tranche horizontale

237	284	331	42	89	136	183
245	292	339	43	97	144	191
197	251	298	2	56	103	150
205	259	306	10	57	111	158
213	260	314	18	65	119	166
221	268	322	26	73	120	174
229	276	323	34	81	128	182

2e tranche horizontale

Calculons la somme des termes dans chacunes des bandes verticales de la première tranche.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
6 & + & 14 & + & 15 & + & 23 & + & 31 & + & 39 & + & 47 & = & \mathbf{175} \\
53 & + & 61 & + & 69 & + & 77 & + & 78 & + & 86 & + & 94 & = & \mathbf{518} \\
100 & + & 108 & + & 116 & + & 124 & + & 132 & + & 140 & + & 141 & = & \mathbf{861} \\
154 & + & 155 & + & 163 & + & 171 & + & 179 & + & 187 & + & 195 & = & \mathbf{1204} \\
201 & + & 209 & + & 217 & + & 218 & + & 226 & + & 234 & + & 242 & = & \mathbf{1547} \\
248 & + & 256 & + & 264 & + & 272 & + & 280 & + & 281 & + & 289 & = & \mathbf{1890} \\
295 & + & 303 & + & 311 & + & 319 & + & 327 & + & 335 & + & 343 & = & \mathbf{2233}
\end{array}$$

Faisons de même pour la deuxième tranche.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
237 & + & 245 & + & 197 & + & 205 & + & 213 & + & 221 & + & 229 & = & \mathbf{1547} \\
284 & + & 292 & + & 251 & + & 259 & + & 260 & + & 268 & + & 276 & = & \mathbf{1890} \\
331 & + & 339 & + & 298 & + & 306 & + & 314 & + & 322 & + & 323 & = & \mathbf{2233} \\
42 & + & 43 & + & 2 & + & 10 & + & 18 & + & 26 & + & 34 & = & \mathbf{175} \\
89 & + & 97 & + & 56 & + & 57 & + & 65 & + & 73 & + & 81 & = & \mathbf{518} \\
136 & + & 144 & + & 103 & + & 111 & + & 119 & + & 120 & + & 128 & = & \mathbf{861} \\
183 & + & 191 & + & 150 & + & 158 & + & 166 & + & 174 & + & 182 & = & \mathbf{1204}
\end{array}$$

On remarque que dans les deux tranches, la somme des lignes verticales se constitue à chaque fois de 7 nombres constants. Les 7 sommes sont permutées de la même manière que le sont les élements du tableau des multiples de n^2. Il en découle que chaque tranche horizontale du cube aura toujours les mêmes sept sommes de lignes verticales, à une permutation près, et donc que la somme totale de chaque tranche est toujours constante.

On peut vérifier également que la somme des lignes horizontales des deux tranches ci-dessus sont toujours 7 nombres constants. Une ligne d'une tranche quelconque, correspondra soit à une ligne horizontale, soit à une ligne verticale d'une tranche horizontale.

Une telle construction de tableau permet donc d'avoir chaque tranche du cube, formé par des bandes qui ont toujours pour somme les 7 constantes. La somme des termes de chaque tranche sera donc toujours identique à un nombre qui n'a pas d'autres choix que d'être la constante magique.

4.1.4 Cube d'ordre 9 et des impairs composés

Pour les cubes d'ordres premiers, il est toujours possible d'avoir des tableaux où les diagonales sont constituées de nombres distincts, comme on a pu le voir sur les exemples des cubes d'ordre 5 et 7. Ce n'est plus le cas pour le cube d'ordre 9 ; on aura soit des nombres répétés sur les diagonales ou soit des nombres répétés sur toutes les verticales.

En effet, si la deuxième ligne d'un tableau commence par le 2$^{\text{e}}$ ou le 9$^{\text{e}}$ terme de la première ligne, on aura une des deux diagonales qui sera constituée par le même entier. Si la deuxième ligne d'un tableau commence par le 3$^{\text{e}}$, 5$^{\text{e}}$, 6$^{\text{e}}$ ou le 8$^{\text{e}}$ terme de la première ligne, on aura seulement trois nombres distincts formant une des deux diagonales du tableau. Et si la deuxième ligne d'un tableau commence par le 4$^{\text{e}}$ ou le 7$^{\text{e}}$ terme de la première ligne, on aura toujours trois nombres répétés à chacune des verticales.

Par contre, pour le cube d'ordre 25, on peut avoir des tableaux constitués de nombres distincts sur chacune des lignes horizontales, verticales et en diagonales pour autant que la deuxième ligne du tableau commence par le 3$^{\text{e}}$, 24$^{\text{e}}$, 4$^{\text{e}}$, 23$^{\text{e}}$, 8$^{\text{e}}$, 19$^{\text{e}}$, 9$^{\text{e}}$, 18$^{\text{e}}$, 13$^{\text{e}}$, ou le 14$^{\text{e}}$ de la première ligne. Violle conjecture qu'un cube, qui est d'ordre carré, c'est-à-dire du type $n = k^2$, pourra avoir ses tableaux sans nombres répétés sur les lignes si et seulement si la deuxième ligne commence par le $i^{\text{ème}}$ terme de la première ligne tel que i, $i-1$ et $i-2$ ne sont pas des multiples de k, la racine de l'ordre du cube.

Violle nous donne en illustration un cube d'ordre 9, dont les tableaux sont construits par la *méthode expéditive*, celle employée pour la construction des carrés magiques d'ordre 9. Cette méthode expéditive peut être appliquée pour la construction de n'importe quel cube d'ordre impair, en s'assurant toutefois que les diagonales brisées de chaque tableau ne soient pas toutes dans la même direction, afin d'éviter la répétition de nombres. Il se trouve que ce genre de construction de cube est du même type que celui du cube de Sauveur.

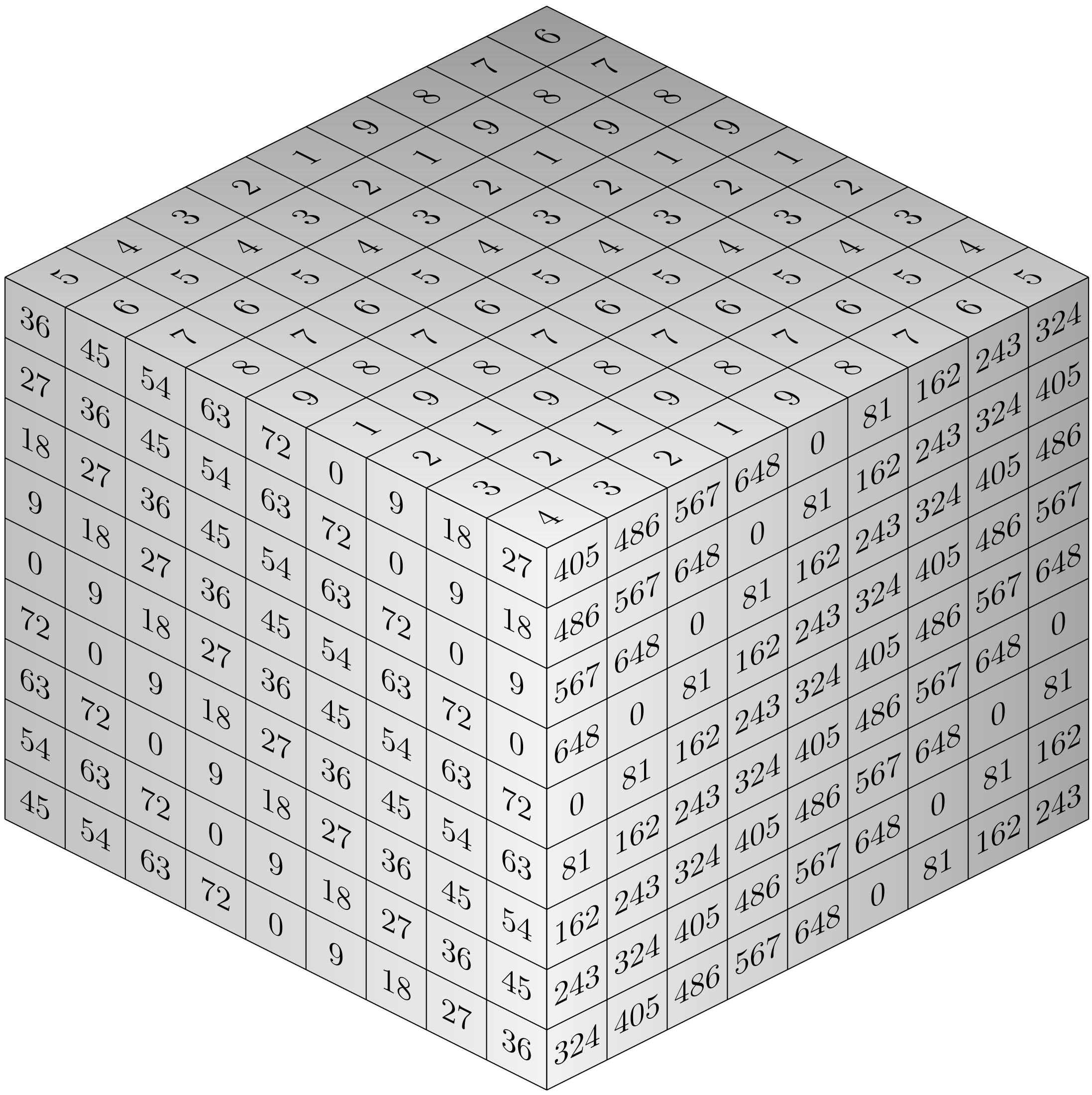

Fig. 4.7 – Tableaux du cube magique d'ordre 9 de Violle

Comme il a été dit précedemment, on peut trouver des cas, pour un tableau d'ordre 9, où une diagonale est constituée de seulement 3 entiers, ou alors que toutes les lignes verticales aient trois nombres répétés. Si l'on veut pouvoir former un cube magique dans ce genre de cas, il faut impérativement que les trois entiers en séries d'une ligne équivalent à trois moyens. Voici un exemple, sur la figure 4.8, donné par Violle, où les tableaux des unités et celui des multiples de 9^2 ont trois nombres répétés sur une de leurs diagonales et où le tableau des multiples de 9 possède à chaque fois trois nombres répétés sur ses lignes.

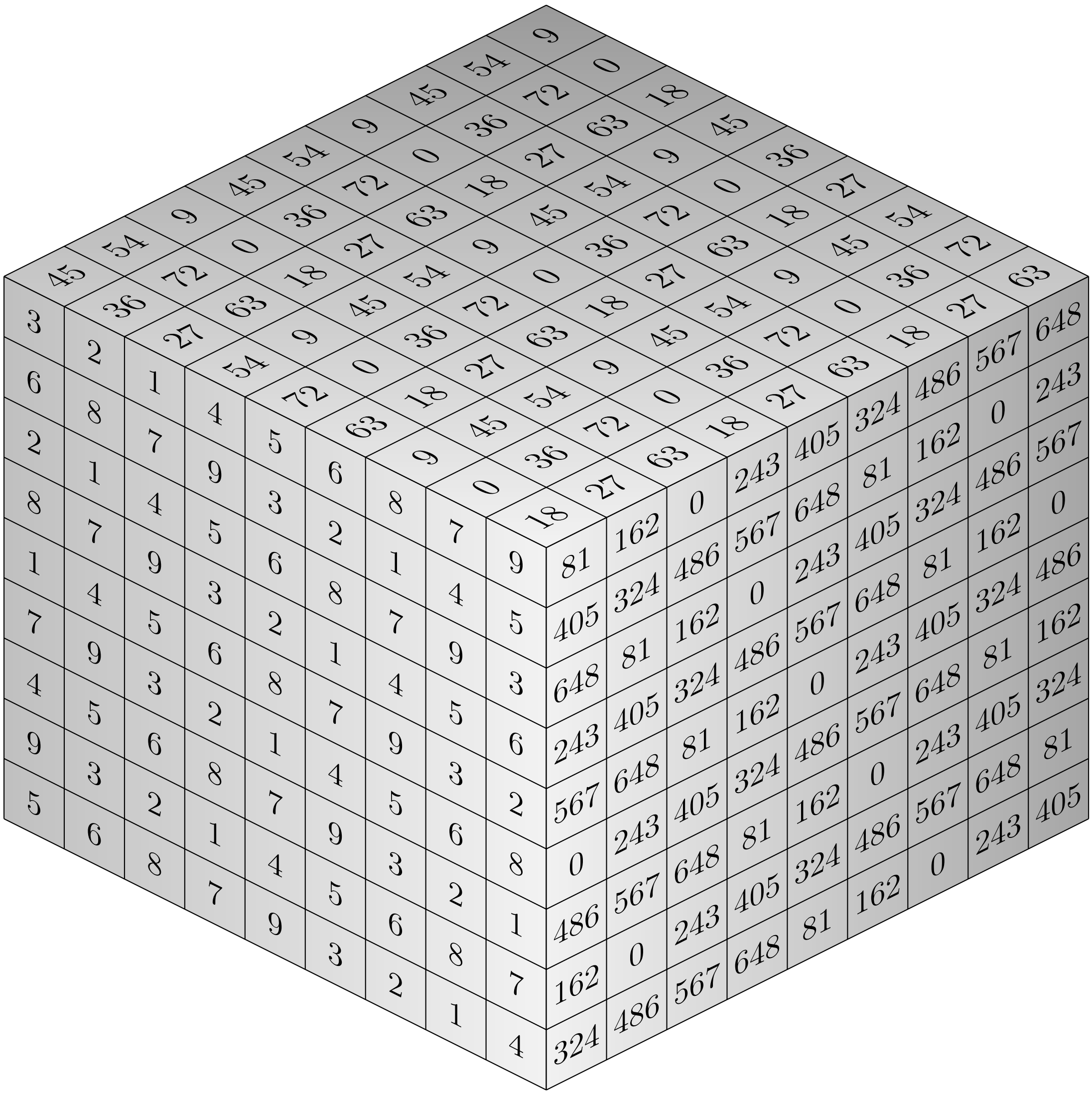

Fig. 4.8 – Tableaux d'un cube magique d'ordre 9 ayant des nombres répétés sur ses lignes

Lorsque l'ordre d'un cube est composé de facteurs premiers impairs, on peut alors avoir des tableaux où les diagonales sont constituées d'entiers répétés qui se dénombrent par un facteur premier de l'ordre. Ainsi, par exemple pour un cube d'ordre 15, on peut avoir 3 ou 5 nombres répétés en diagonales ou en verticales. Violle nous fait un exposé complet du cube d'ordre 15 pour montrer les différents cas que l'on peut être confronté, selon le nombre choisit dans première ligne d'un tableau servant au commencement de la deuxième ligne. Voici les différentes possibilités de commencer la deuxième ligne d'un tableau d'ordre 15

- Par le 2^e ou le dernier terme ; on aura alors le moyen en diagonale.
- Par le 3^e ou le 9^e terme ; on aura une série de 5 nombres répétés sur la $1^{ère}$ diagonale.
- Par le 14^e ou le 8^e terme ; une série de 5 nombres sur la 2^e diagonale.
- Par le 4^e terme ou le 13^e terme ; série de 5 nombres répétés en verticale.
- Par le 5^e terme ; série de 3 nombres sur la $1^{ère}$ diagonale, et de 5 nombres sur la 2^e diagonale.
- Par le 12^e terme ; série de 5 à la $1^{ère}$ diagonale, et de 3 à la 2^e diagonale.
- Par le 6^e terme ; série de 3 en verticale, et série de 5 à la $1^{ère}$ diagonale.
- Par le 11^e terme ; série de 3 en verticale, et série de 5 à la 2^e diagonale.
- Par le 7^e terme ; série de 5 en verticale, et série de 3 à la 2^e diagonale.
- Par le 10^e terme ; série de 5 en verticale, et série de 3 à la $1^{ère}$ diagonale.

La diagonale qui passe par le coin supérieur gauche est appelée ici $1^{ère}$ diagonale, celle passant par le coin inférieur gauche étant la 2^e diagonale. Si on veut avoir un cube magique à partir de ces tableaux avec nombres répétés, il faut qu'une série de k nombres ait pour somme k fois le moyen. Pour le tableau des unités du cube d'ordre 15, le nombre 8 étant le moyen, il faut qu'une série de 3 nombres ait 24 pour somme des trois termes, et pour une série de 5 nombres, une somme de 40 pour ses termes.

On peut former les tableaux de ce type pour les multiples de la racine ou du carré de la racine, en substituant simplement les termes du tableau des unités par les multiples correspondants. Ainsi, pour les multiples de la racine, on remplace le nombre 1 par 0, le nombre 2 par 15, le nombre 3 par 30, et ainsi de suite. On se ramène donc uniquement à l'étude de construction du tableau des unités ; les autres tableaux peuvent être déduit des tableaux des unités.

Si on veut par exemple construire un tableau d'ordre 15 dont la deuxième ligne commence par exemple par le 6^e terme de la première ligne, on doit avoir 5 groupes de 3 nombres répétés sur les verticales, et 5 nombres répétés sur une diagonale. Violle va illustrer par un exemple les étapes à faire pour construire un tel tableau. Soient les groupes de 3 entiers suivants : $\{1, 13, 10\}$, $\{3, 9, 12\}$, $\{5, 8, 11\}$, $\{4, 6, 14\}$, et $\{2, 7, 15\}$. Il nous faut choisir un nombre de chaque groupe tel que la somme des 5 entiers égale 40. Par exemple, $\{10, 3, 11, 14, 2\}$. Si on place 10 au début de la $1^{ère}$ ligne horizontale, il faudra que 1 et 13 soient aux 6^e et au 11^e rang. Si on veut ensuite que le nombre 3 soit le deuxième nombre de la diagonale en série, il devra se trouver obligatoirement au 7^e rang de la première ligne horizontale. Les entier 9 et 12 se placeront alors au 2^e et au 12^e rang. Si on choisit que l'entier 14 soit le 3^e nombre de la diagonale, il sera au 13^e rang de la première ligne, et les nombres 4 et 6 au 3^e et 8^e rang. Si 11 est placé en 4^e place sur la diagonale, il sera également au 4^e rang sur la première ligne horinzontale, et 5 et 8 au 9^e et au 14^e rang. Finalement, 2 devra être mis au 10^e rang et 7 et 15 au 5^e et 15^e rang. Voici le tableau :

10	9	4	11	7	1	3	6	5	2	13	12	14	8	15
1	3	6	5	2	13	12	14	8	15	10	9	4	11	7
13	12	14	8	15	10	9	4	11	7	1	3	6	5	2
10	9	4	11	7	1	3	6	5	2	13	12	14	8	15
1	3	6	5	2	13	12	14	8	15	10	9	4	11	7
13	12	14	8	15	10	9	4	11	7	1	3	6	5	2

FIG. 4.9 – Les 6 premières lignes d'un tableau dont les lignes commencent par le 6^e terme de la précedente.

Violle calcule le nombre de tableaux admissible pour cet exemple, en commençant la deuxième ligne par le le 6^e terme de la première. Les possibilités de groupes de trois entiers dont le nombre 15 fait partie sont au nombre de quatre : $\{15, 1, 8\}$, $\{15, 2, 7\}$, $\{15, 3, 6\}$ et $\{15, 4, 5\}$. À partir de ces 4 groupes, Violle remarque qu'il y a 11 différentes façon de former, à partir des 15 premiers nombres naturels, 5 groupes de trois entiers ayant à chaque fois pour somme de leurs éléments la constante 24. Violle fait alors une recherche complète pour trouver toutes les possibilités de choisir un nombre de chacun de ces groupes, de tel sorte que la somme des 5 entiers ainsi pris soit égale à 40. Ces 5 entiers constituent la diagonale en série. Il ne me paraît pas nécessaire d'illustrer toutes ces combinaisons, qui sont au nombre de 124.

Mais cette longue analyse de Violle du cube d'ordre 15 est un guide de raisonnement pour la construction des autres cubes impairs composés.

4.2 Cube d'ordre pair

4.2.1 Cube d'ordre 4

Violle nous donne un cube d'ordre 4 en illustration, sans toutefois le commenter, où les tableaux ne possèdent aucune répétition sur ses lignes.

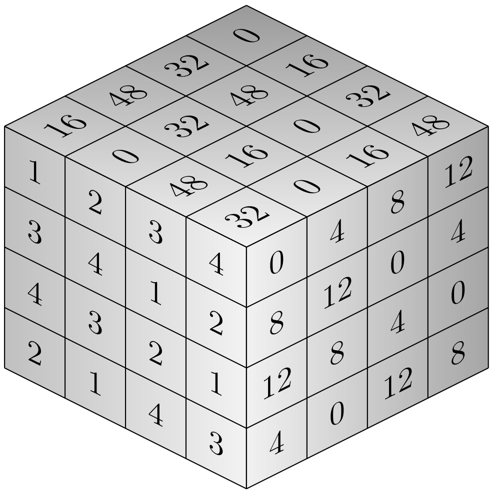

Fig. 4.10 – Tableaux, sans répétition de nombres, d'un cube d'ordre 4.

Comme il a été vu précédemment, les tableaux des cubes d'ordre pair peuvent avoir des nombres répétés sur leurs lignes. Voici un deuxième cube d'ordre 4 que Violle présente avec répétition d'entiers.

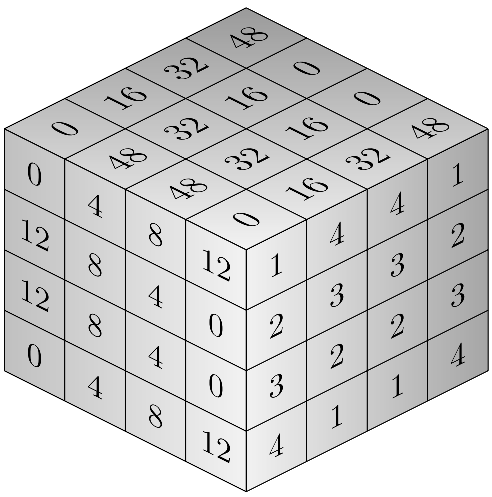

Fig. 4.11 – Tableaux, avec répétition de nombres, d'un cube d'ordre 4.

Les tableaux correspondent au cube ci-dessous :

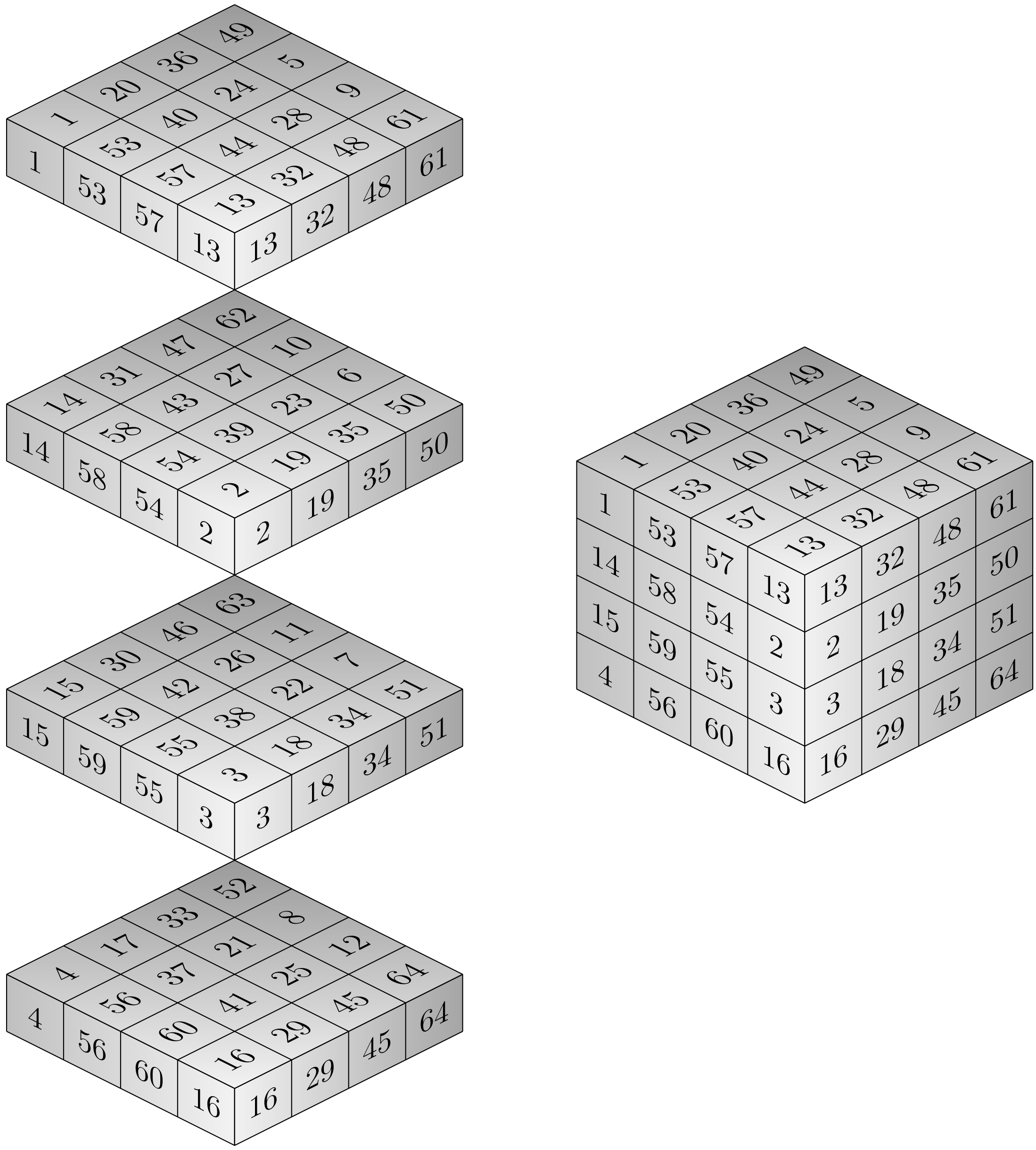

FIG. 4.12 – Un cube magique d'ordre 4 de Violle

Dans le tableau des unités, la répétition a lieu en horizontale, alors que dans les deux autres tableaux, en verticale. Si la répétition était du même type dans les trois tableaux, on n'aurait pas des nombres tous distincts dans le cube.

4.2.2 Cube d'ordre 8

Pour le cube d'ordre 8, ainsi que pour tous les cubes d'ordre pairement pair, il est facile de construire les tableaux associés. Il faut éviter, lorsque les tableaux ont des nombres répétés sur les lignes, que les trois tableaux soient construits de la même manière. C'est-à-dire que si les deux premiers tableaux ont des nombres répétés en horizontale, le troisième devra par exemple avoir des répétitions en verticale, comme c'est le cas dans le cube d'ordre 8 illustré par Violle ci-dessous.

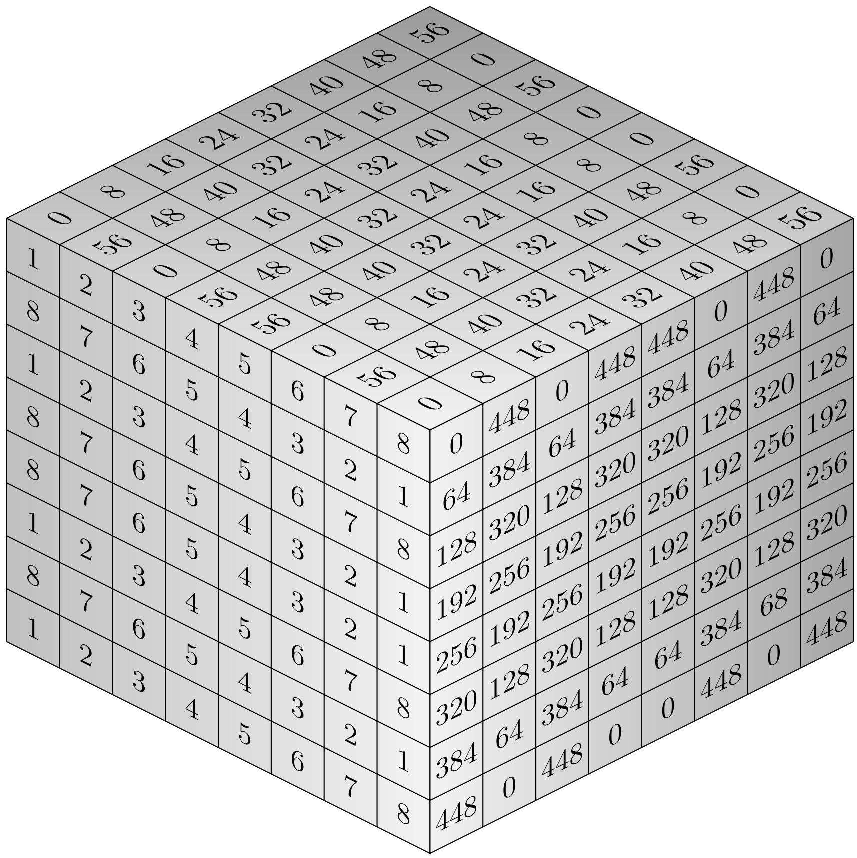

Fig. 4.13 – Tableaux, avec répétition de nombres, d'un cube d'ordre 8.

Violle calcule que, pour cette forme de tableaux, il y a 339'738'624 combinaisons différentes possibles de placer les entiers, et donc de cubes magiques différents. Mais il existe plusieurs autres formes possibles de construction de tableaux pour le cube d'ordre 8. Donc l'estimation du nombre total de cubes magiques pour un ordre donné est très difficile à déterminer, tout comme pour le cas des carrés magiques, ce qui contraindra Violle à éviter de traiter le sujet.

4.2.3 Cube d'ordre 6

Pour le cube d'ordre 6, Violle commence par nous donner des contre-exemples. En premier, il nous donne un exemple pour insister sur le fait que lors d'une construction d'un cube magique, il ne faut pas seulement s'intéresser aux propriétés des tableaux mais, il est important de toujours vérifier que l'on est confronté à des éléments distincts dans le cube.

Dans l'exemple de la figure 4.14, toutes les tranches vérifient les propriétés voulues. De plus, deux des tableaux ont des nombres répétés en horizontale, et le troisième tableau a des répétitions en verticale. Le cube ainsi construit aura bien une constante pour la somme de chacune de ses tranches. Mais plusieurs nombres apparaissent de façon répétée, et par conséquent, certains nombres de la suite arithmétique naturelle sont manquants.

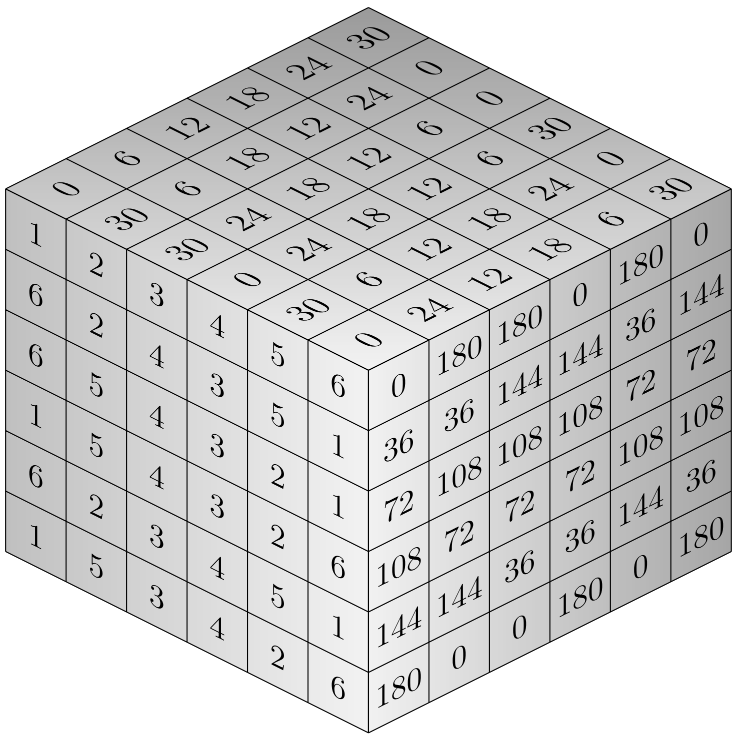

FIG. 4.14 – Contre-exemple de tableaux dont le cube associé n'a pas tous ses éléments distincts.

Dans le deuxième contre-exemple de Violle, sur la figure 4.15, bien que le cube soit constitué de nombres tous distincts, il n'est pas magique. Ce genre de cas est courant si on utilise des tableaux où la somme des termes dans une ligne n'est pas toujours égale à celle des autres du même tableau. On a vu qu'il était possible de construire des carrés magique bien que les diagonales soient incomplètes. Mais Violle suggère d'éviter la construction de tels tableaux en dimension 3.

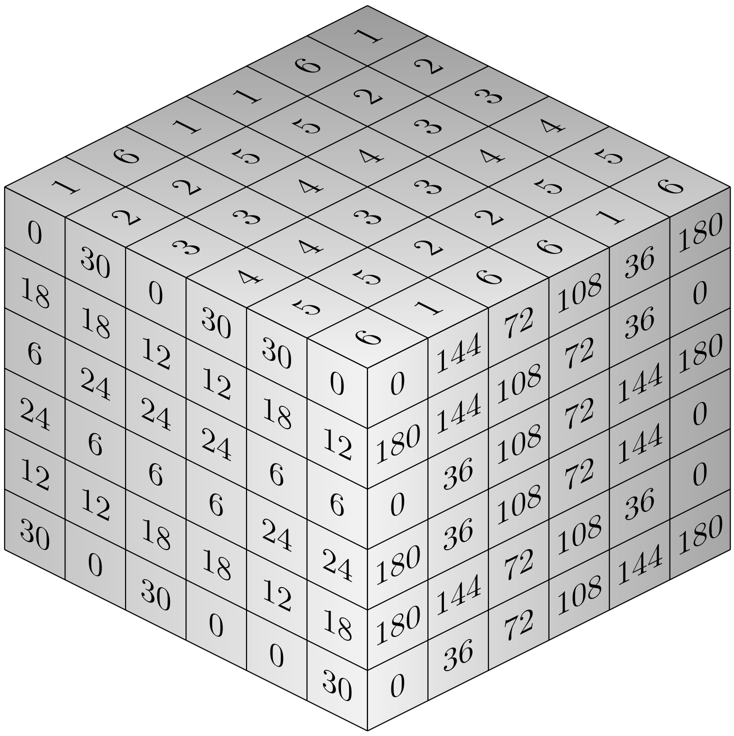

Fig. 4.15 – Contre-exemple de tableaux dont le cube associé n'est pas magique.

Ainsi, lorsqu'on choisit au préalable une forme pour les tableaux, il faudra toujours procéder à la vérification du résultat avant la formation du cube. Violle nous donne sa technique pour vérifier facilement que les éléments du cube sont tous distincts. En prenant le 0 du tableau des multiples du carré de la racine et le 0 du tableau des multiples de la racine, il s'assure d'obtenir toutes les unités aux cases correspondantes du cube. Il continuera sa vérification avec tous les autres multiples de la racine pour constater que l'on a effectivement bien inscrit les n^2 premiers nombres dans les cases du cube. Et ensuite, de même avec les autres multiples du carré de la racine, mais seulement jusqu'à la moitié. En effet, si on vérifie que les nombres jusqu'à $\frac{n^3}{2}$ sont dans le cube, il en résulte, par la construction des tableaux, que la deuxième moitié est également partie intégrante du cube magique.

Violle nous donne finalement en illustration un cube magique d'ordre 6 que voici :

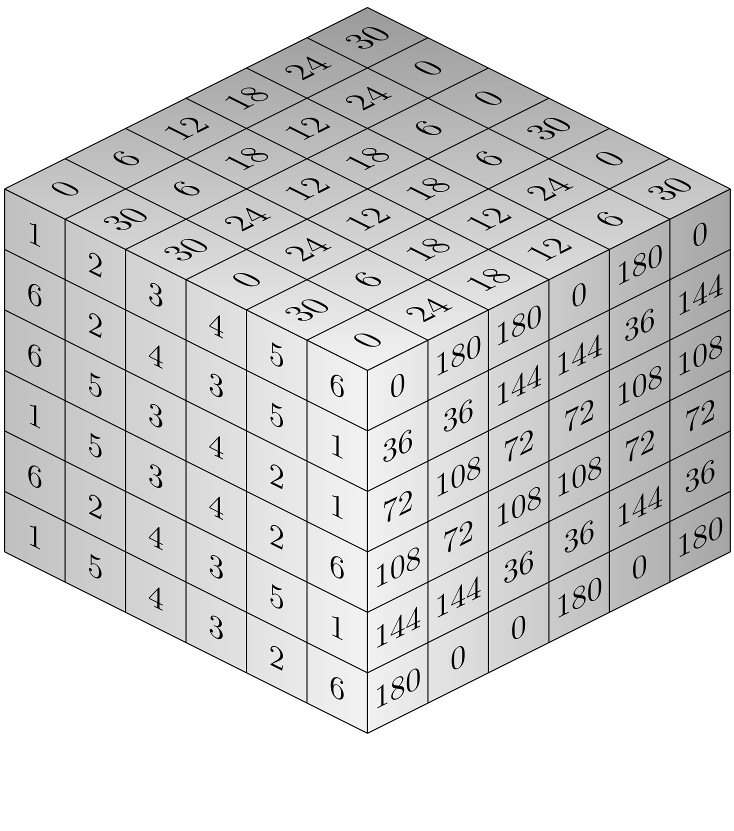

Fig. 4.16 – Tableaux d'un cube magique d'ordre 6 de Violle.

4.2.4 Cube d'ordre 10

Violle nous donne un exemple d'un cube d'ordre 10 sans mentionner les détails de son élaboration.

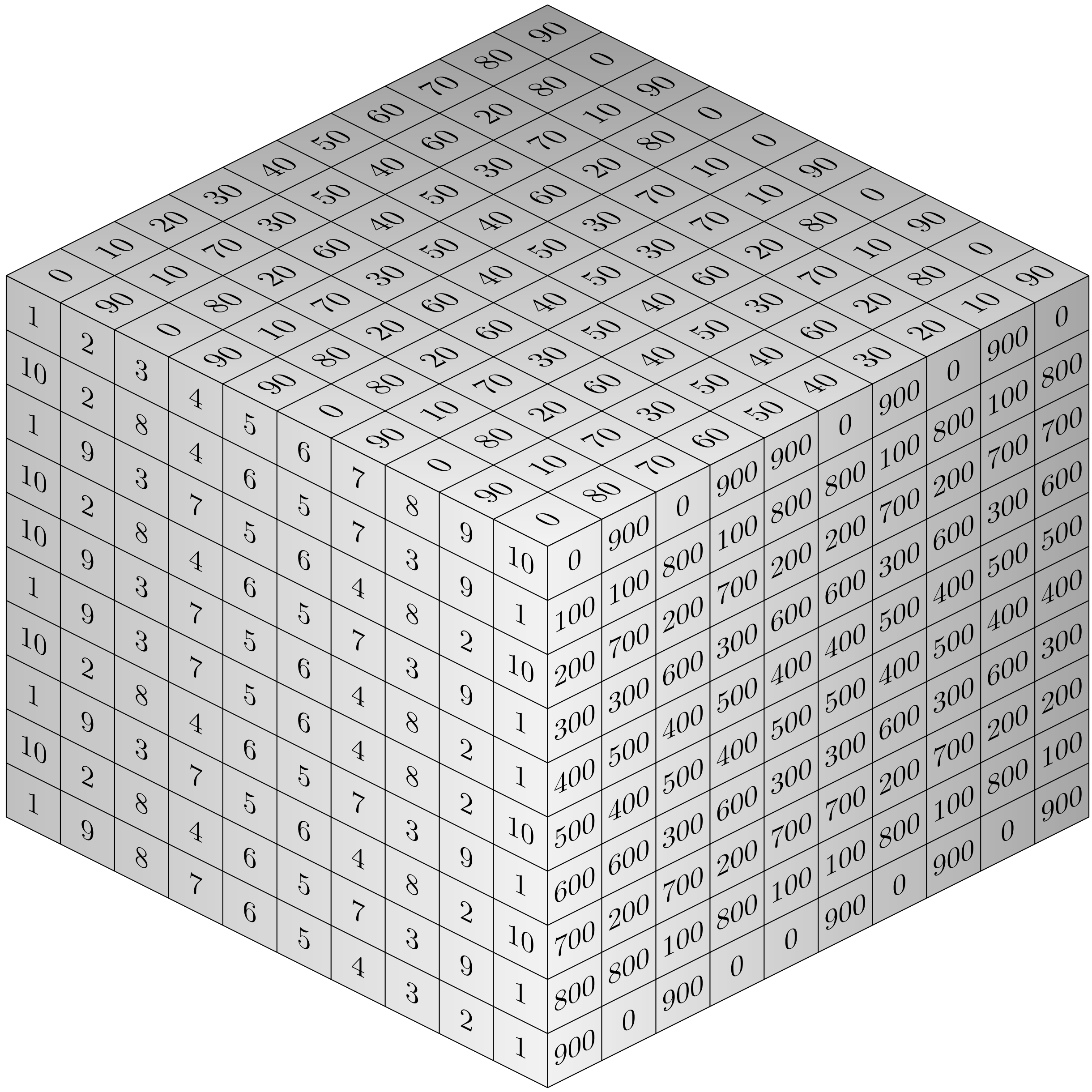

Fig. 4.17 – Tableaux d'un cube magique d'ordre 10 de Violle

4.3 Parallélipipèdes Magiques

À la suite de son traité sur les cubes magiques, Violle inclut un traité sur les parallélipipèdes magiques. Les cubes étant également des parallélipipèdes particuliers, il utilisera cette technique générale pour construire des cubes d'ordre 3 et 4.

Violle considère qu'un parallélipipède est magique si toutes les bandes de chaque tranche parallèle ont pour somme de leurs termes une constante. Cette définition est plutôt étonnante. On aurait pu penser qu'il définirait un parallélipipède magique de manière similaire à sa définition du cube magique ; c'est la somme des termes de chaque tranche parallèle qui est une constante, et non la somme des bandes.

L'ordre d'un parallélipipède est décomposé en trois facteurs correspondant au nombres de cases à ses côtés. Avec cette définition de parallélipipède magique, si un de ses facteurs est un nombre pair, il ne pourra pas avoir un autre facteur impair. Par exemple, si on a un parallélipipède d'ordre $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, le terme moyen vaut $\frac{31}{2}$. Ainsi, une bande de longueur 3 aura pour somme le triple du terme moyen qui est un résultat fractionnaire.

Je vais illustrer la technique de Violle d'une construction d'un parallélipipède magique avec le cube d'ordre 4 qui nous intéresse.

4.3.1 Cube d'ordre 4

On doit inscrire les 64 premiers entiers naturels dans le cube magique ; la constante magique de chaque bande doit être égale à 130. Le but est, dans un premier temps, de construire 4 carrés magiques qui formeront des tranches parallèles du cube magique. Violle commence par décomposer les 64 entiers en groupe de 4 nombres consécutifs comme ci-dessous :

Élements du groupe				Somme des éléments	Ordre du groupe
1	2	3	4	10	1
5	6	7	8	26	2
9	10	11	12	42	3
13	14	15	16	58	4
		⋮		⋮	⋮
57	58	59	60	234	15
61	62	63	64	250	16

FIG. 4.18 – Répartitions des 64 premiers naturels en groupe de 4 entiers qui se suivent.

On remarque que la somme des termes de chaque groupe excède la précedente de 16 ; c'est donc une suite arithmétique. Chaque carré magique sera constitué de 4 de ces groupes ; il faut donc partager ces 16 groupes en quatre parties ayant la même somme totale de leurs termes. Cette somme doit être égale à $4 \cdot 130 = 520$; la somme des ordres des 4 groupes formant un carré est donc de $4 \cdot \frac{17}{2} = 34$. Voici une répartition possible des 16 groupes : $\{1, 2, 15, 16\}$, $\{3, 4, 13, 14\}$, $\{5, 6, 11, 12\}$, $\{7, 8, 9, 10\}$.

On construit ensuite, par la méthode expéditive, les carrés magiques avec les élements de chacun de ces 4 groupes, ce qui nous donne les 4 carrés magiques de la figure 4.19.

1	63	62	4
60	6	7	57
8	58	59	5
61	3	2	64

9	55	54	12
52	14	15	49
16	50	51	13
53	11	10	56

17	47	46	20
44	22	23	41
24	42	43	21
45	19	18	48

25	39	38	28
36	30	31	33
32	34	35	29
37	27	26	40

FIG. 4.19 – Les 4 carrés magiques construits par la méthode expéditive.

Chacun de ces 4 carrés magiques, que Violle appelle *carrés partiels*, formeront une tranche du cube magique, que l'on peut supposer, sans perte de généralité, horizontales. Ainsi, toutes les bandes horizontales du cube ont pour somme la constante magique vu qu'elles font toutes partie d'un carré magique. Il nous reste donc encore à traiter le cas des bandes verticales.

Dans sa définition de parallélipipèdes magiques, seules les bandes orthogonales doivent avoir pour somme la constante magique. On peut donc échanger constamment les places des lignes verticales ou horizontales dans chacun des carrés partiels. La seule altération due à ce changement se trouvera dans la somme des diagonales, ce qui nous importe peu. On va donc déterminer l'ordre des lignes de chaque carré afin d'obtenir la constante magique pour la somme des termes dans les bandes verticales. Violle choisit dans chaque carré un élément tel que la somme des 4 entiers choisis soit égale à la constante magique de valeur 130. Soit l'exemple de Violle : $\{1, 52, 45, 32\}$. Ces quatres nombres choisis, formeront une bande verticale du cube ; les lignes correspondantes dans chacun de leurs carrés respectifs devront donc être alignées. La tranche verticale, illustrée dans la figure 4.20, est ainsi déterminée.

1	63	62	4
52	14	15	49
45	19	18	48
32	34	35	29

FIG. 4.20 – Première tranche verticale du cube magique.

Violle définit, dans un carré construit par la méthode expéditive, les deux lignes horizontales du milleu des carrés partiels, ainsi que la première et dernière ligne de *complémentaires*. Ils ont la propriété, que Violle juge remarquable, que si on remplace les lignes de la tranche verticale de la figure 4.20 par les lignes complémentaires de chacun de leurs carrés partiels respectifs, alors le nouveau carré sera une tranche du cube magique. Nous avons donc immédiatement la tranche complémentaire constituée des lignes complémentaires que voici :

61	3	2	64
16	50	51	13
17	47	46	20
36	30	31	33

FIG. 4.21 – Tranche complémentaire du cube magique

On réitère ce procédé pour trouver les tranches verticales manquantes. On choisit 4 entiers restants dans chacun des carrés partiels ayant pour somme 130, par exemple $\{60, 9, 24, 37\}$. On construit ainsi sa tranche verticale ainsi que sa tranche complémentaire.

Nous obtenons finalement le cube magique d'ordre 4 que voici :

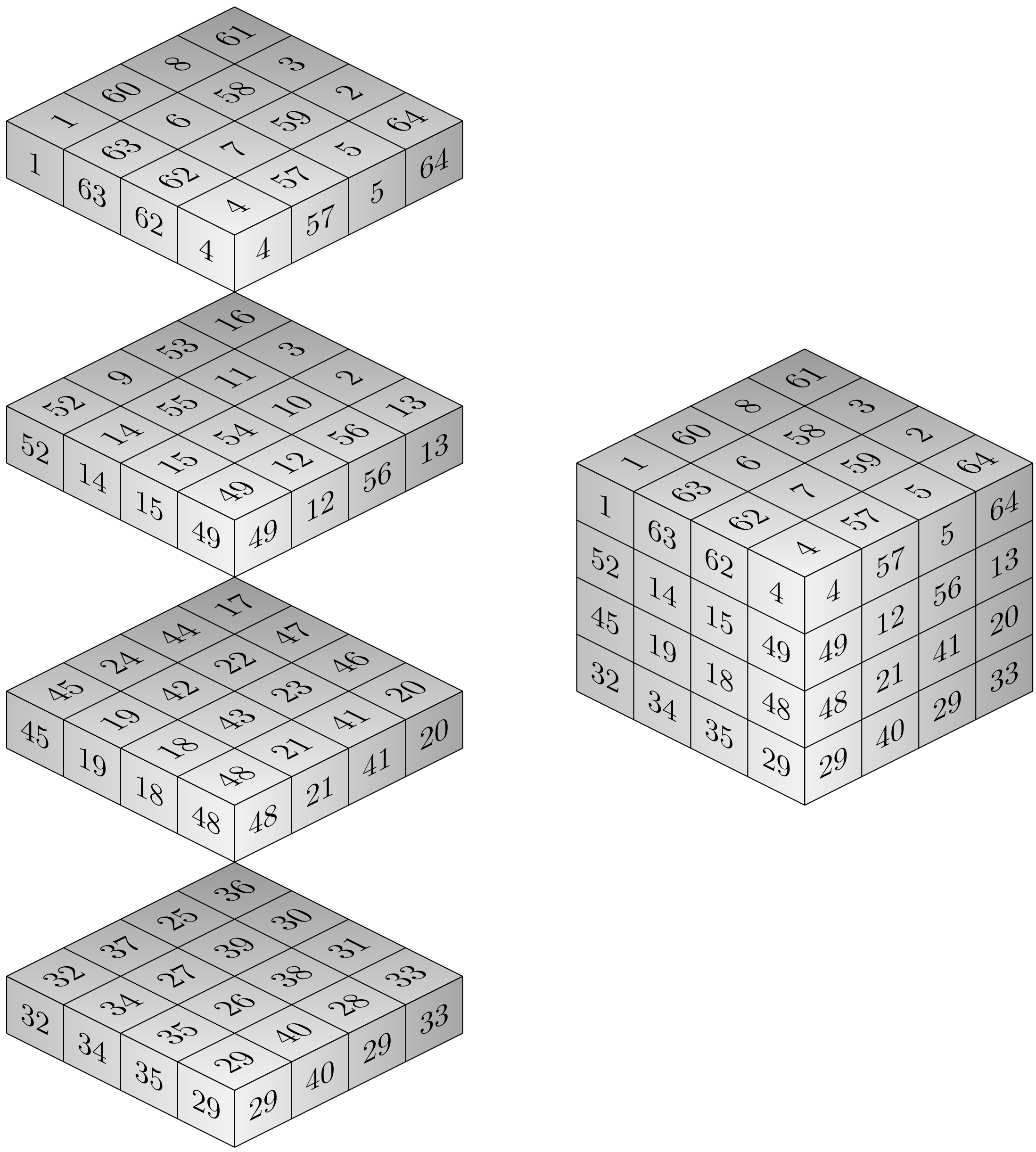

Fig. 4.22 – Cube magique d'ordre 4 de Violle.

Chaque bande orthogonale, verticale ou horizontale, de ce cube magique a pour somme de ses termes la constante 130. Ce cube est donc magique selon la définition de Violle ; chaque tranche a une somme totale de 520 vu qu'elle est constituée de 4 bandes de somme 130. Les diagonales des tranches horizontales ont aussi pour somme la constante magique car, par construction, les tranches sont des carrés magiques d'ordre 4. Ce cube n'est par contre pas considéré comme magique de nos jours, car les 4 triagonales principales ne satisfont pas la propriété magique souhaitée.

Violle ne fait aucune généralisation de cette méthode de construction. Chacun des parallélipipèdes magiques d'ordre pair présenté par Violle a pour facteur le nombre 4 ; cette construction reste donc valable dans ces cas-là. Mais il est évident que cela n'est pas convenable pour tous les types de cubes ; la méthode expéditive utilisée ci-dessus, est applicable seulement aux cubes d'ordre pairement pair.

De plus, cette méthode de construction utilisée par Violle est trop approximative et fastidieuse ; on doit chercher par tâtonnement, des nombres appartenant aux carrés partiels et ayant pour somme la constante magique. Et rien ne nous garantit que l'on pourra le faire à chaque itération pour des cubes d'ordres plus élevés. D'autre part, on ne peut pas construire un cube magique pour chaque type de carrés partiels choisis. Violle ne nous donne pas les conditions pour que les carrés partiels soient satisfaisants ; il nous fait simplement la remarque que si « les progressions adoptées ne pouvaient fournir les bandes [verticales], il faudrait prendre d'autres carrés [partiels] ».

4.3.2 Cube d'ordre 3

Pour construire le cube d'ordre 3, Violle commence, comme pour le cube d'ordre 4, par répartir les nombres jusqu'à 27 en groupes de 3.

Élements du groupe			Somme des éléments	Ordre du groupe
1	2	3	6	1
4	5	6	15	2
7	8	9	24	3
10	11	12	33	4
	⋮		⋮	⋮
22	23	24	69	8
25	26	27	78	9

FIG. 4.23 – Répartitions des 27 premiers naturels en groupe de 3.

Il faut partager ces 9 groupes en 3 parties qui formeront les tranches horizontales du cube. La somme des nombres qui représente les ordres étant de 45, chaque partie de 3 groupes devra alors avoir pour somme de ses ordres le tiers de 45, c'est-à dire 15. On peut choisir l'exemple de Violle : $\{2, 4, 9\}$, $\{1, 6, 8\}$, et $\{3, 5, 7\}$.

On aura ainsi les trois carrés magiques partiels suivants :

26	4	12
6	11	25
10	27	5

23	1	18
3	17	22
16	24	2

20	7	15
9	14	19
13	21	8

FIG. 4.24 – Les 3 carrés partiels.

Reste encore à trouver comment placer les lignes de chaque carré partiel pour avoir les bandes verticales correctes. Voici le choix que donne Violle sans justification :

26	4	12
3	17	22
13	21	8

6	11	25
16	24	2
20	7	15

10	27	5
23	1	18
9	14	19

FIG. 4.25 – Les 3 tranches verticales du cube magique.

Nous obtenons ainsi le cube magique illustré dans la figure 4.26.

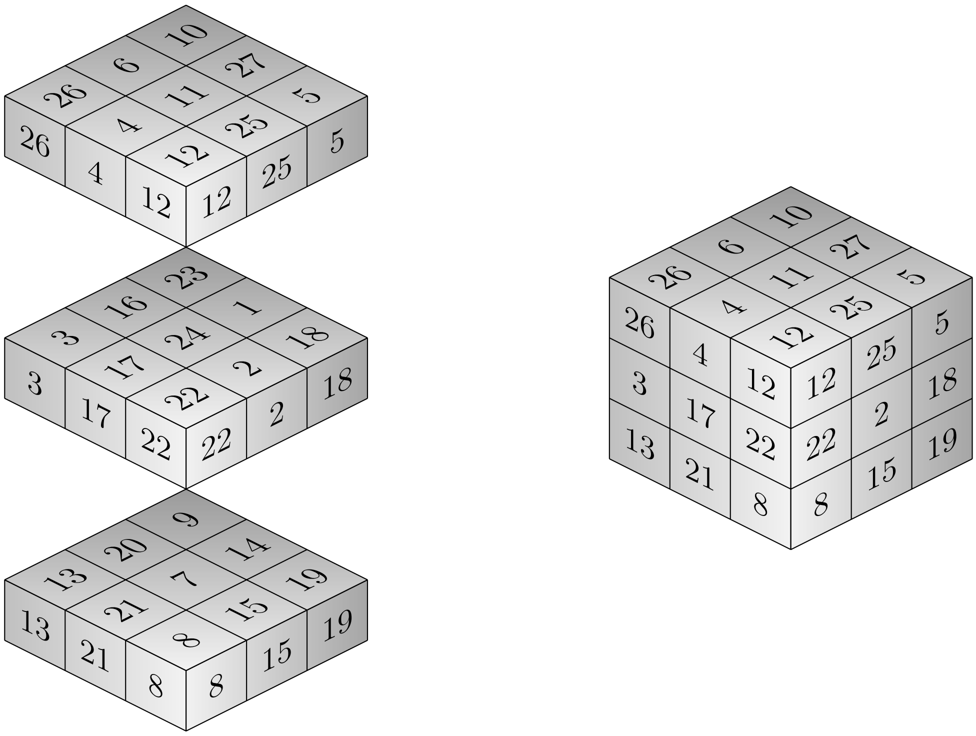

FIG. 4.26 – Cube magique d'ordre 3 de Violle.

Violle remarque que, tout comme le cube d'ordre 4 construit précédemment, le cube magique d'ordre 3 est encore « plus magique » que les cubes trouvés dans son traité des cubes magiques. Non seulement ils sont magiques, selon la définition de Violle, mais de plus, les bandes orthogonales ont toutes la même somme. Il considère ces cubes comme, je cite, « très-remarquables ». Ces cubes sont pourtant encore loin d'être aussi remarquables que les cubes Nasik, considérés de nos jours comme les meilleurs qui soient. Et pour cause, les cubes remarquables de Violle n'appartiennent même pas au cercle fermé des cubes magiques contemporains car ils ne remplissent pas les propriétés souhaitées ; les 4 triagonales principales n'ont jamais pour somme la constante magique.

Chapitre 5

Conclusion

Violle avait pour but, avec son traité sur les cubes magiques, de « faciliter de nouvelles investigations » sur un sujet qui était encore nouveau à l'époque et dont aucun auteur ne s'était encore réellement occupé précédemment. Mais malgré son travail considérable, la définition de *cube magique* a depuis évolué et son travail a ainsi perdu tout intérêt. De nos jours, aucun des cubes présentés par Violle n'est considéré comme magique. De plus, la totalité de ses cubes magiques a été construite par des méthodes utilisant des tableaux, et il est fortement improbable que l'on puisse en construire de la sorte avec notre définition contemporaine de cube magique.

Seul son traité sur les parallélipipèdes magiques se rapproche quelque peu des cubes magiques contemporains, mais malheureusement, sa méthode traitée manque cruellement d'efficacité pour une recherche de cubes d'ordres plus élevés. On ne peut donc en retirer aucune utilité pour une méthode de construction générale de cubes magiques.

Si Violle avait poussé plus loin sa recherche de cubes « très-remarquables » et s'il avait considéré les 4 triagonales principales comme également magiques, on aurait pu lui attribuer la découverte du premier cube magique. Le dernier cube d'ordre 4 de Violle avait 48 lignes magiques sur les 52 nécessaires à la définition d'un cube magique. Mais malheureusement, la définition de cube magique de Violle, et plus particulièrement celle de parallélipipède magique, néglige les diagonales et ne se focalise que sur les lignes orthogonales.

Il n'est donc pas étonnant que l'on fasse que très rarement référence à Violle car il n'y a malheureusement rien qui pourrait nous être utile pour la recherche actuelle sur les cubes magiques. Il faut toutefois reconnaitre le mérite de ce traité clair et accessible à tous, qui incidemment a peut être été à l'origine de la curiosité de ses succésseurs.

Bibliographie

[1] B. Violle. *Traité complet des carrés magiques.* Tome 1 Paris : Bachelier, 1837. Trouvé en ligne : http ://gallica.bnf.fr

[2] B. Violle. *Traité complet des carrés magiques.* Tome 2 Paris : Bachelier, 1837. Trouvé en ligne : http ://gallica.bnf.fr

[3] B. Violle. *Traité complet des carrés magiques.* Tome 3 Paris : Bachelier, 1837. Trouvé en ligne : http ://gallica.bnf.fr

[4] W.S Andrews. *Magic Squares and Cubes.* Dover Publications, 1960.

[5] William H. Benson, Oswald Jacoby. *Magic Cubes : New Recreation.* Dover Publications Inc, 1981.

[6] Jacques Bouteloup. *Carrés Magiques, Carrés Latins et Eulériens.* Éditions du Choix, 1991.

[7] René Descombes. *Les Carrés Magiques.* Vuibert, 2000.

[8] Jacques Sesiano. *Un traité médiéval sur les carrés magiques. De l'arrangement harmonieux des nombres.* Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1996.

[9] Jacques Sesiano. *Les carrés magiques dans les pays islamiques.* Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2004.

[10] A.H. Frost. *Inventions of Magic Cubes.* Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 1866, p. 92-103.

[11] A.H. Frost. *Supplementary Note on Magic Cubes.* Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 1867, p. 74.

[12] A.H. Frost. *On the general Properties of Nasik Squares.* Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 1878, p. 34-49.

[13] A.H. Frost. *On the general Properties of Nasik Cubes.* Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 1878, p. 93-123.

[14] F.A.P. Barnard. *Theory of Magic Squares and Cubes.* Memoirs of the National Academy of Sciences, Volume IV, 1888, p. 209-270.

[15] Walter Trump. (dernière consultation le 08.01.2010) [En ligne]. http ://www.trump.de/magic-squares/magic-cubes/cubes-1.html

[16] Christian Boyer. (dernière consultation le 08.01.2010) [En ligne]. http ://www.multimagie.com/

[17] John-R. Hendricks. (dernière consultation le 08.01.2010) [En ligne]. http ://members.shaw.ca/johnhendricksmath/

[18] Harvey Heinz. (dernière consultation le 08.01.2010) [En ligne]. http ://members.shaw.ca/hdhcubes/